Calcul intégral

1er décembre 2015

Table des matières

1 Généralités.

1.1 Primitives

Définition 1.1.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction dérivable F est une primitive de f sur I si , pour tout $x \in I$ on a $F'(x) = f(x)$. On note $F = \int f$.*

Si une fonction admet une primitive sur un intervalle, elle en admet plusieurs. La proposition suivante montre cependant que ces primitives diffèrent entre elles d'une constante.

Proposition 1.1.2 *Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I alors il existe un réel C tel que pour tout x de I on ait $F(x) = G(x) + C$.*

Par exemple les fonctions $2x$ et $2x + 1$ sont des primitives sur $\mathbb{R}$ de de la fonction x^2.

1.2 Primitives d'une fonction continue

Proposition 1.2.1 *Soit f une fonction continue (par morceaux) sur l'intervalle $I = [a, b]$. Alors f admet des primitives sur cet intervalle.*

1.3 Intégrale d'une fonction continue

Définition 1.3.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ ou de a à b le nombre réel noté $\int_a^b f(x)dx$ et défini par :*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: [F]_a^b$$

où F est primitive quelconque de f sur $[a, b]$,

2 Propriétés des primitives.

Soit f et g deux fonctions continues et k_1, k_2 des constantes réelles.

2.1 Linéarité

$$\int (k_1.f + k_2 g) = k_1 \int f + k_2 \int g$$

2.2 Composée

$$\int U'(x).f(U(x))\ dx = F(U(x))$$

où U est une fonction continue et F une primitive de f.

On déduit de cette propriété et du tableau suivant des primitives usuelles, le tableau des primitives composées.

2.3 Primitives usuelles.

f	$\mathbf{F} = \int \mathbf{f}$
1	$x + C$
x	$\frac{x^2}{2} + C$
x^r, pour $r \neq -1$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$, pour $x > 0$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
e^x	$e^x + C$

2.4 Primitives composées.

f	$\mathbf{F} = \int \mathbf{f}$
$U'U^\alpha$, pour $\alpha \neq -1$	$\frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{U'}{U}$	$\ln \lvert U \rvert + C$
$U' \sin U$	$-\cos U + C$
$U' \cos U$	$\sin U + C$
$U' e^U$	$e^U + C$

3 Quelques propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$, k_1 et k_2 deux constantes réelles.

3.1 Relation de Chasles

Soit $c \in [a, b]$, on a $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

Cette propriété permet de définir $\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$

3.2 Linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b (k_1.f(x) + k_2.g(x))dx = k_1 \int_a^b f(x)dx + k_2 \int_a^b g(x)dx$$

3.3 Positivité de l'intégrale et interprétation géométrique.

Si de plus f est à valeurs positives sur l'intervalle $[a, b]$, alors l'intégrale de f sur $[a, b]$ est positive est égale à l'aire de la surface délimitée par le graphe de f au dessus de $[a, b]$ et l'axe des x.

Exercice 3.3.1 *Calculer l'aire de la surface délimitée par la parabole $x \mapsto x^2$, pour $x \in [-1, 1]$ par exemple. Le lecteur pourra ainsi retrouver le résultat qu'a énoncé Archimède : cette aire vaut 4/3 de l'aire du triangle inscrit. Il faut noter que la méthode d'Archimède consiste à découper la surface en triangles.*

3.4 Intégrales et inégalités

Si pour tout $x \in [a, b]$ on a $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

4 Trois techniques de calcul

4.1 Intégration par parties

Il arrive que l'on ait à intégrer un produit de fonctions. Le produit de primitives n'est pas une primitive du produit. Plus précisément, pour deux fonctions u et v dérivables, on a

$$(u.v)'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

On en déduit la formule d'intégration par parties :

Proposition 4.1.1 *Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. On a*

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

4.1.1 Exemple.

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos x$. On a alors $u'(x) = 1$ et l'on peut prendre $v(x) = \sin x$ (un autre choix de primitive est tout à fait possible mais ne change pas le résultat du calcul). On obtient donc

$$I = [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

4.1.2 En pratique.

Cette formule s'applique aux intégrales des fonctions de la forme :

- *$P(x). \sin(kx)$, $P(x). \cos(kx)$, $P(x).e^{kx}$, avec k une constante et $P(x)$ un polynôme.*
On posera $U = P(x)$ et $V' = \sin(kx), \cos(kx), e^{kx}$.
Le nombre d'intégration par parties successives qu'il faudra faire est égal au degré de P.
- *$P(x) \ln x$, on posera $U = \ln x$ et $V' = P(x)$, le calcul se ramènera à l'intégration d'une fraction rationnelle.*

4.2 Changement de variable

Noter que l'égalité ci-dessous peut être lue dans les deux sens, et qu'elle sert autant dans l'un que dans l'autre.

Proposition 4.2.1 *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Soit aussi ui une fonction continument dérivable de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$ avec $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$). On a*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt$$

En pratique : *on écrit $x = u(t)$, $dx = u'(t)dt$, $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$ et on remplace.*

4.2.1 Exemples.

- *Calculer* $\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$.

On pose $u(t) = \sin t$. *On a* $du = u'(t)dt = \cos t dt$ *et* $u(\alpha) = 0$ *pour* $\alpha = 0$, $u(\beta) = 1$ *pour* $\beta = \frac{\pi}{2}$. *La formule ci-dessus lue de gauche à droite donne alors*

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt.$$

Or sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, *donc*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Remarque. On vient de calculer la surface d'un quart de disque de rayon 1.

- *Calculer* $J = \int_1^e \frac{(\ln(t))^2}{t}dt$

On reconnait dans la fonction à intégrer une expression de la forme $f(u(t))u'(t)$ *avec* $u(t) = \ln t$ *(et donc* $u'(t) = 1/t$*) et* $f(x) = x^2$. *On a* $u(1) = 0$, $u(e) = 1$ *et, en lisant la formule de changement de variable de droite à gauche,*

$$J = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$$

4.3 Primitives de fractions rationnelles

Lorsque f *est une fraction rationnelle, il existe un procédé dit de décomposition en éléments simples qui permet de trouver ses primitives. Rappelons d'abord que ces primitives n'existent que sur chaque intervalle inclus dans l'ensemble de définition de* f. *On donne maintenant une idée de ce procédé pour les fractions rationnelles du type*

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}.$$

Il faut distinguer trois cas :

- *Cas 1 : le dénominateur admet deux racines réelles distinctes* x_1 *et* x_2. *Dans ce cas on peut écrire*

$$f(x) = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2},$$

  où A *et* B *sont deux réels.*

- *Cas 2 : le dénominateur admet une racine double* x_0. *Dans ce cas il existe* A *et* B *dans* $\mathbb{R}$ *tels que*

$$f(x) = \frac{A}{(x - x_0)^2} + \frac{B}{x - x_0}$$

- *Cas 3 : le dénominateur ne s'annule pas : on écrit*

$$f(x) = A\frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} + B\frac{1}{(x + \frac{b}{2})^2 + \Delta^2}.$$