

المحور الثالث: نظرية المحفظة والحد الكفؤ.

5- أسلوب التدرج البسيط لبناء المحفظة المثلى: طرح نموذج التدرج من قبل إدوين إلتون وآخرون في مقالتهم بعنوان المعايير البسيطة لإختيار المحفظة المثلى سنة 1976، وفيه اعتمدوا على نفس الافتراضات التي تقدم بها وليام شارب في نموذج المؤشر الواحد سنة 1963، لاسيما من حيث آلية القياس والمعادلات، لكن اختلفوا عنه في الإعتماد على طرق حسابية غير معقدة لبناء المحفظة المثلى، ولعل السبب الرئيسي في إيجاد هذا الأسلوب هو الصعوبة البالغة في تنفيذ نظرية المحفظة لماركوفيتز، الذين أرجعوا صعوبة تنفيذها ذلك إلى:

- صعوبة تقدير بيانات المدخلات اللازمة (لا سيما مصفوفات الارتباط)؛
- الوقت والتكلفة اللازمة لإنشاء المحافظ الفعالة (حل مشكلة البرمجة التريعية)؛
- صعوبة تثقيف مديري المحافظ فيما يتعلق بالمقايضات المرتبطة بعائد والمخاطرة.

لكن هذه الصعوبات تم تلافيها نظرا للإستخدام الكبير للبرامج الحاسوبية في حل هذا النوع من المسائل، ويفترض هذا الأسلوب أن المصدر الوحيد للحركة المشتركة للأصول الإستثمارية يأتي بسبب استجابة مشتركة لتحركات السوق، كما أن تقنية الحل العددي البسيط لبناء المحفظة المثلى تفترض أن معامل الارتباط بين جميع أزواج الأصول الإستثمارية ثابت مع وجود أصل بلا مخاطرة، يمكن في النقاط الآتية إيجاز خطوات هذا النموذج في مايلي:

5-1- مدخلات الأسلوب: يستند هذا الأسلوب على مجموعة من المدخلات يمكن الإشارة إليه في الجدول التالي:

المدلول	المدخلات وصيغة الحساب
معدل العائد الفعلي للأصل الإستثماري أ .	R_i
المتوسط التاريخي للعوائد الفعلية للأصل أ .	$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i$
تباين العوائد الفعلية للأصل الإستثماري أ ، يقيس درجة المخاطرة الكلية له.	$\sigma_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2$
الإنحراف المعياري للعائد الفعلي للأصل أ ، الذي يقيس درجة المخاطرة الكلية له.	$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$
معامل التغاير الذي يقيس حساسية تغير عوائد الأصل أ نتيجة تغير عوائد الأصل ج .	$COV(R_i, R_j) = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (R_{(i,t)} - \bar{R}_i)(R_{(j,t)} - \bar{R}_j)$
معامل التغاير الذي يقيس حساسية تغير عوائد الأصل أ نتيجة تغير عوائد السوق م .	$COV(R_i, R_m) = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (R_{(i,t)} - \bar{R}_i)(R_{(m,t)} - \bar{R}_m)$
معامل β يقيس المخاطرة المنتظمة للأصل أ .	$\beta_i = \frac{COV(R_i, R_j)}{\sigma_M^2}$
معدل العائد الخالي من المخاطرة.	R_f

5-2- حساب نسبة ترينور: تعتبر من المقاييس التقليدية لقياس الأداء تمثل هذه النسبة فائض العائد لكل وحدة من المخاطر إستنادا إلى المخاطر المنتظمة المقاسة بمعامل β بدلا من المخاطر الكلية، وتستخدم هذه النسبة لقياس أداء الأصول الإستثمارية الفردية والمحافظ الإستثمارية معا، وتعطى معادلة قياس هذه النسبة كما يلي:

$$T_i = \frac{(R_i - R_f)}{B_i}$$

بعد حساب هذه النسبة لكل أصل إستثماري مرشح للدخول في المحفظة المثلى، يقترح إدوين إلتون وزملائه ترتيب كل الأصول المرشحة وفق نسبة ترينور (T_i) تنازليا أي من أعلى إلى أدنى نسبة.

5-3- تحديد معدل القطع C_i : يقصد به ذلك المعدل الذي من خلاله يتم تحديد الأصل الإستثماري المرشح للإلضمام إلى المحفظة الإستثمارية المثلى، بمقابلة نسبة ترينور (T_i) للأصل الإستثماري المعني مع معدل القطع الخاص به، فإذا كانت النسبة أعلى من معدل القطع يقبل الأصل ضمن المحفظة المثلى والعكس صحيح وتعطى صيغة

$$C_i = \frac{\sigma_M^2 \sum_{i=1}^n \frac{(R_i - R_f) \times B_i}{\sigma_{ei}^2}}{1 + \sigma_M^2 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{\sigma_{ei}^2}} \quad \text{حسابه كما يلي:}$$

5-4- تحديد معدل القطع C_i^* : يمثل معدل القطع الخاص بأصل إستثماري منضم إلى المحفظة المثلى يحقق الشرط: $T_i \geq C_i$ ، وبعد دخول هذا الأصل الإستثماري يتم رفض باقي الأصول الإستثمارية (حيث تصبح فيها $T_i < C_i$).

5-5- تحديد الأوزان النسبية W_i : يأتي بعد تحديد الأصول الداخلة ضمن المحفظة الإستثمارية المثلى، تحديد الأوزان النسبية بإفتراض عدم السماح بالبيع بالمكشوف ($W_i \geq 0$) لها كالاتي:

$$\begin{cases} Z_i = \left[\frac{B_i}{\sigma_{ei}^2} * \left(\frac{(R_i - R_f)}{B_i} - C_i^* \right) \right] \\ W_i = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^n Z_i} \end{cases}$$

أما في حالة السماح بالبيع بالمكشوف فإن جميع الأصول الإستثمارية المرشحة للدخول في المحفظة تدخل في تكوين المحفظة المثلى، حيث أن جميع الأصول الإستثمارية إما تشتري (مركز طويل) أو تباع (مركز قصير)، ولتصميم المحفظة المثلى في هذه الحالة نتبع نفس الخطوات السابقة، فقط يأخذ C_i^* قيمة آخر أصل إستثماري مرتب وفق نسبة ترينور، أما الأوزان النسبية المثلى التي ينبغي إستثمارها في كل أصل إستثماري فتحدد وفقا لطريقتين:

- التعريف النمطي للبيع القصير: تفترض هذه الطريقة أن البيع القصير هو مصدر للأموال، وضمنها تتحدد الأوزان النسبية المثلى كما يلي: $W_i = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^n Z_i}$ و $\sum_{i=1}^n W_i = 1$ ، حيث أن W_i تكون إما موجبة أو سالبة.

- تعريف لينتير (Lintner): تعتبر هذه الطريقة البيع القصير إستخداما للأموال ويستلم المستثمر معدل خالي من المخاطرة على الأموال الموظفة بالبيع القصير، وتتحدد الأوزان النسبية المثلى: $W_i = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^n |Z_i|}$ و $\sum_{i=1}^n |W_i| = 1$

- مثال 03: ليكن لديك الجدول التالي:

σ_{ei}^2	B_i	R_i	الورقة المالية
50	1	15	A
40	1,5	17	B
20	1	12	C
10	2	17	D
40	1	11	E
30	1,5	11	F
40	2	11	G
16	0,8	7	H
20	1	7	I
6	0,6	5,6	J

المطلوب: حدد المحفظة المالية المثلى باستخدام أسلوب الترتيب البسيط في حالة السماح وعدم السماح بالبيع بالمكشوف إذا علمت أن: $\sigma_m^2 = 10$ ، R_f يبلغ 05%.

- الحل: نحسب النسبة: $T_i = \frac{(R_i - R_f)}{B_i}$ كما هو مبين في ما يلي:

$\frac{(R_i - R_f)}{B_i}$	σ_{ei}^2	B_i	R_i	الورقة المالية
10	50	1	15	A
8	40	1,5	17	B
7	20	1	12	C
6	10	2	17	D
6	40	1	11	E
4	30	1,5	11	F
3	40	2	11	G
2,5	16	0,8	7	H
2	20	1	7	I
1	6	0,6	5,6	J

نقوم الآن بترتيب الأوراق المالية حسب نسبة ترينور تنازليا، حيث يلاحظ من الجدول أنها مرتبة ترتيبا تنازليا، وعليه سنقوم الآن بتحديد كل من C_i و C_i^* كما هو موضح في الجدول التالي:

C_i	$\sum_{i=1}^n \frac{\beta_i^2}{\sigma_{ei}^2}$	$\sum_{i=1}^n \frac{(R_i - R_f) \times B_i}{\sigma_{ei}^2}$	$\frac{\beta_i^2}{\sigma_{ei}^2}$	$\frac{(R_i - R_f) B_i}{\sigma_{ei}^2}$	$\frac{(R_i - R_f)}{B_i}$	الورقة المالية
1,67	2/100	2/10	2/100	2/10	10	A
3,69	7,625/100	6,5/10	5,625/100	4,5/10	8	B
4,42	12,625/100	10/10	5/100	3,5/10	7	C
5,43	52,625/100	34/10	40/100	24/10	6	D
5,45	55,125/100	35,5/10	2,5/100	1,5/10	6	(C_i^*) E
5,3	62,625/100	38,5/10	7,5/100	3/10	4	F
5,02	72,625/100	41,5/10	10/100	3/10	3	G
4,91	76,625/100	42,5/10	4/100	1/10	2,5	H
4,75	81,625/100	43,5/10	5/100	1/10	2	I
4,52	87,625/100	44,1/10	6/100	0,6/10	1	J

وبعد حساب نقطة القطع C_i نحدد الأوراق المالية الداخلة في المحفظة المثلى الأوراق A ، B ، C ، D و E (تحقق الشرط : $T_i \geq C_i$)، كما أن C_i^* يمثل معدل القطع الخاص بالورقة المالية (E) وهي آخر ورقة مالية تنضم إلى المحفظة المثلى التي تحقق الشرط : $T_i \geq C_i$ ، أي أن : $C_i^* = 5,45$. وعليه فإن الأوزان النسبية للأوراق المالية الداخلة في المحفظة في حالة عدم السماح بالمكشوف تحسب كما يلي:

$$Z_A = \frac{1}{50} (10 - 5,45) = \mathbf{0,0910}$$

$$Z_B = \frac{1,5}{40} (8 - 5,45) = \mathbf{0,0956}$$

$$Z_C = \frac{1}{20} (7 - 5,45) = \mathbf{0,0775}$$

$$Z_D = \frac{2}{10} (6 - 5,45) = \mathbf{0,1100}$$

$$Z_E = \frac{1}{40} (6 - 5,45) = \mathbf{0,0138}$$

وبالتالي فإن $\sum_{i=1}^5 Z_i = 0,3879$ وعليه فإن:

$$W_A = \frac{0,0910}{0,3879} = \mathbf{0,2346}$$

$$W_B = \frac{0,0956}{0,3879} = \mathbf{0,2464}$$

$$W_C = \frac{0,0775}{0,3879} = \mathbf{0,1998}$$

$$W_D = \frac{0,1100}{0,3879} = \mathbf{0,2836}$$

$$W_E = \frac{0,0138}{0,3879} = \mathbf{0,0356}$$

بمعنى المحفظة المثلى المصممة وفق أسلوب التدرج البسيط يتم توزيع المبلغ المستثمر فيها بنسبة 23,46 % في الورقة المالية (A)، 24,64 % في الورقة المالية (B)، 19,98 % في الورقة المالية (C)، 28,36 % في الورقة المالية (D) و 23,46 % في الورقة المالية (E).

أما في حالة السماح بالبيع على المكشوف فإن جميع الأوراق المالية تدخل في تصميم المحفظة المثلى، حيث لا نأخذ بالشرط : $T_i \geq C_i$ ، وعليه فإن : $C_i^* = 4,52$ وهي تمثل نقطة القطع للورقة المالية (J) التي رتبت في الرتبة الأخيرة حسب نسبة ترينور، وبالتالي فإن الأوزان النسبية للأوراق المالية الداخلة في المحفظة المثلى في حالة السماح بالمكشوف بإستخدام طريقة التعريف النمطي للبيع القصير تحسب كما يلي:

$$Z_A = \frac{1}{50} (10 - 4,52) = \mathbf{0,1100}$$

$$Z_B = \frac{1,5}{40} (8 - 4,52) = \mathbf{0,1310}$$

$$Z_C = \frac{1}{20} (7 - 4,52) = \mathbf{0,1240}$$

$$Z_D = \frac{2}{10} (6 - 4,52) = \mathbf{0,2960}$$

$$Z_E = \frac{1}{40} (6 - 4,52) = \mathbf{0,0370}$$

$$Z_F = \frac{1,3}{30} (4 - 4,52) = \mathbf{-0,0260}$$

$$Z_G = \frac{2}{40} (3 - 4,52) = \mathbf{-0,0760}$$

$$Z_H = \frac{0,8}{16} (2,5 - 4,52) = \mathbf{-0,1010}$$

$$Z_I = \frac{1}{20} (2 - 4,52) = \mathbf{-0,1260}$$

$$Z_J = \frac{0,6}{6} (1 - 4,52) = \mathbf{-0,3520}$$

وبالتالي فإن $\sum_{i=1}^5 Z_i = 0,0170$ وعليه فإن:

$$W_A = \frac{0,1100}{0,0170} = \mathbf{6,4705}$$

$$W_B = \frac{0,1310}{0,0170} = \mathbf{7,7059}$$

$$W_C = \frac{0,1240}{0,0170} = \mathbf{7,2941}$$

$$W_D = \frac{0,2960}{0,0170} = \mathbf{17,4118}$$

$$W_E = \frac{0,0370}{0,0170} = \mathbf{2,1765}$$

$$W_F = \frac{-0,0260}{0,0170} = \mathbf{-1,5294}$$

$$W_G = \frac{-0,0760}{0,0170} = \mathbf{-4,4706}$$

$$W_H = \frac{-0,1010}{0,0170} = \mathbf{-5,9412}$$

$$W_I = \frac{-0,1260}{0,0170} = \mathbf{-7,4118}$$

$$W_J = \frac{-0,3520}{0,0170} = \mathbf{-20,7059}$$

إذن في حالة السماح بالبيع بالمكشوف وباستخدام طريق التعريف النمطي للبيع القصير فإنه ينبغي شراء (إتخاذ مركز طويل) الأوراق المالية A، B، C، D و E وإتخاذ مركز قصير (البيع بالمكشوف) في الأوراق المالية F، G، H، I و J.

وبإستخدام تعريف لينتتر $W_i = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^n |Z_i|}$ و $\sum_{i=1}^n |W_i| = 1$ فإن الأوزان النسبية للمحفظة المصممة وفق

أسلوب التدرج البسيط وفي حالة السماح بالبيع بالمكشوف تحسب كالاتي:

$$\sum_{i=1}^n |Z_i| = \mathbf{1,3790}$$

ومن ثم فإن:

$$W_A = \frac{0,1100}{1,3790} = \mathbf{0,0798}$$

$$\begin{aligned}
 W_B &= \frac{0,1310}{1,3790} = \mathbf{0,0949} \\
 W_C &= \frac{0,1240}{1,3790} = \mathbf{0,0899} \\
 W_D &= \frac{0,2960}{1,3790} = \mathbf{0,2146} \\
 W_E &= \frac{0,0370}{1,3790} = \mathbf{0,0268} \\
 W_F &= \frac{-0,0260}{1,3790} = \mathbf{-0,0189} \\
 W_G &= \frac{-0,0760}{1,3790} = \mathbf{-0,0551} \\
 W_H &= \frac{-0,1010}{1,3790} = \mathbf{-0,0732} \\
 W_I &= \frac{-0,1260}{1,3790} = \mathbf{-0,0914} \\
 W_J &= \frac{-0,3520}{1,3790} = \mathbf{-0,2553}
 \end{aligned}$$

إذن في حالة السماح بالبيع بالمكشوف وباستخدام طريقة تعريف لينتتر فإنه ينبغي شراء (إتخاذ مركز طويل) الأوراق المالية A، B، C، D و E وإتخاذ مركز قصير (البيع بالمكشوف) في الأوراق المالية F، G، H، I و J، حيث أن:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n |W_i| &= 0,0798 + 0,0949 + 0,0899 + 0,2146 + 0,0268 + 0,0189 + 0,0551 + 0,0732 \\
 &+ 0,0914 + 0,2553 = \mathbf{1}
 \end{aligned}$$

يتبين من خلال حالة السماح بالبيع بالمكشوف أن طريقة تعريف لينتتر تبدو معقولة، إلا أن الأوزان النسبية المحسوبة وفق التعريف النمطي للبيع القصير تبدو متطرفة، كما يتجلى أن الأوراق المالية التي يتم إتخاذ فيها مركز طويل تختلف فيما إذا كان البيع بالمكشوف مسموح به أو لا.

6- نموذج الإرتباط الثابت لبناء المحفظة المثلى: يفترض هذا النموذج أن الإرتباط بين عوائد جميع أزواج الأوراق المالية هو متساوي، بمعنى الإرتباط الماضي بين عوائد جميع الأوراق المالية سيظل ثابتا للمستقبل المنظور، ودون الدخول أكثر في الإفتراضات التي يقوم عليها هذا النموذج، يمكننا وصف بناء المحفظة المثلى في إطار هذا النموذج كالتالي:

6-1- حساب نسبة شارب: إذا كان الإرتباط مقبولا لوصف التحرك المشترك بين الأوراق المالية (كما في نموذج المؤشر الواحد)، فإن جميع الأوراق المالية يمكن أن ترتب طبقا لنسبة عاؤها الفائض إلى إنحرافها المعياري، أي ترتب تنازليا وفق صيغة نسبة شارب المبينة أدناه:

$$SH = \frac{(R_i - r_f)}{\sigma_i}$$

يلاحظ أن الترتيب مازال على أساس العائد الفائض إلى المخاطرة كما في نسبة ترينور إلى أن الإختلاف يكمن في إستخدام مقياس المخاطرة الكلية (σ_i) بدلا من المخاطرة المنتظمة (B_i).

2-6- تحديد معدل القطع C_i : تعطى صيغة حسابه في ظل نموذج الارتباط البسيط كالتالي:

$$C_i = \frac{\rho}{1 - \rho + j\rho} \sum_{i=1}^n \frac{(R_i - r_f)}{\sigma_i}$$

حيث يمثل (ρ) معامل الارتباط الذي يفترض بأنه ثابت لعوائد جميع أزواج الأوراق المالية، أما (j) فتشير إلى أن (C_i) قد حسبت باستخدام بيانات أول الأوراق المالية (j) .

3-6- تحديد معدل القطع C_i^* : يمثل معدل القطع الخاص بأصل إستثماري منضم إلى المحفظة المثلى يحقق الشرط: $SH \geq C_i$ ، وبعد دخول هذا الأصل الإستثماري يتم رفض باقي الأصول الإستثمارية (حيث تصبح فيها $SH < C_i$).

4-6- تحديد الأوزان النسبية W_i : يأتي بعد تحديد الأصول الداخلة ضمن المحفظة الإستثمارية المثلى، تحديد الأوزان النسبية بإفتراض عدم السماح بالبيع بالمكشوف ($W_i \geq 0$) لها كالاتي:

$$\begin{cases} Z_i = \left[\frac{1}{(1 - \rho)\sigma_i} \left(\frac{(R_i - R_f)}{\sigma_i} - C_i^* \right) \right] \\ W_i = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^n Z_i} \end{cases}$$

أما في حالة السماح بالبيع بالمكشوف فإن جميع الأصول الإستثمارية المرشحة للدخول في المحفظة تدخل في تكوين المحفظة المثلى، حيث أن جميع الأصول الإستثمارية إما تشتري (مركز طويل) أو تباع (مركز قصير)، ولتصميم المحفظة المثلى في هذه الحالة نستخدم إما طريقة التعريف النمطي للبيع القصير أو تعريف لينتير المبينة في أسلوب التدرج البسيط.

- مثال 04: ليكن لديك الجدول التالي:

σ_i	R_i	الورقة المالية
3	29	A
2	19	B
4	29	C
6	35	D
2	14	E
4	21	F
6	26	G
3	14	H
5	15	I
2	09	J
4	11	K
3	08	L

المطلوب: حدد المحفظة المالية المثلى باستخدام نموذج الارتباط الثابت في حالة عدم السماح بالبيع بالمكشوف إذا علمت أن: $\rho = 0,5$ ، R_f يبلغ 05%.

- **الحل:** سنستعين بالخطوات التالية من أجل الإجابة على المطلوب:

- نحسب النسبة: $SH = \frac{(R_i - r_f)}{\sigma_i}$ كما هو مبين في ما يلي:

$\frac{(R_i - r_f)}{\sigma_i}$	σ_i	R_i	الورقة المالية
08	3	29	A
07	2	19	B
06	4	29	C
05	6	35	D
04,50	2	14	E
04	4	21	F
03,50	6	26	G
03	3	14	H
02	5	15	I
02	2	09	J
01,50	4	11	K
01	3	08	L

نقوم الآن بترتيب الأوراق المالية حسب نسبة شارب تنازليا، حيث يلاحظ من الجدول أنها مرتبة ترتيبا

تنازليا، وعليه سنقوم الآن بتحديد كل من C_i و C_i^* كما هو موضح في الجدول التالي:

$\frac{(R_i - r_f)}{\sigma_i}$	C_i	$\sum_{i=1}^n \frac{(R_i - r_f)}{\sigma_i}$	$\frac{\rho}{1 - \rho + j\rho}$	الورقة المالية
08	04	08	1/2	A
07	05	15	1/3	B
06	05,25	21	1/4	(C_i^*) C
05	05,20	26	1/5	D
04,50	05,08	30,50	1/6	E
04	04,93	34,50	1/7	F
03,50	04,75	38	1/8	G
03	04,56	41	1/9	H
02	04,30	43	1/10	I
02	04,09	45	1/11	J
01,50	03,88	46,50	1/12	K
01	03,65	47,50	1/13	L

وبعد حساب نقطة القطع C_i نحدد الأوراق المالية الداخلة في المحفظة المثلى الأوراق A ، B ، و C (تحقق

الشرط : $SH \geq C_i$)، كما أن C_i^* يمثل معدل القطع الخاص بالورقة المالية (C) وهي آخر ورقة مالية تنضم إلى

المحفظة المثلى التي تحقق الشرط : $SH \geq C_i$ ، أي أن : $C_i^* = 5,25$. وعليه فإن الأوزان النسبية للأوراق المالية

الداخلة في المحفظة في حالة عدم السماح بالمكشوف تحسب كما يلي:

$$Z_A = \frac{1}{1,5} (8 - 5,25) = 1,8333$$

$$Z_B = \frac{1}{1} (7 - 5,25) = 1,7500$$

$$Z_C = \frac{1}{2} (6 - 5,25) = 0,3750$$

وبالتالي فإن $\sum_{i=1}^3 Z_i = 3,9583$ وعليه فإن:

$$W_A = \frac{1,8333}{3,9583} = 0,4632$$

$$W_B = \frac{1,7500}{3,9583} = 0,4421$$

$$W_C = \frac{0,3750}{3,9583} = 0,0947$$

بمعنى المحفظة المثلى المصممة وفق نموذج الارتباط الثابت يتم توزيع المبلغ المستثمر فيها بنسبة 46,32 % في الورقة المالية (A)، 44,21 % في الورقة المالية (B) و 09,47 % في الورقة المالية (C).