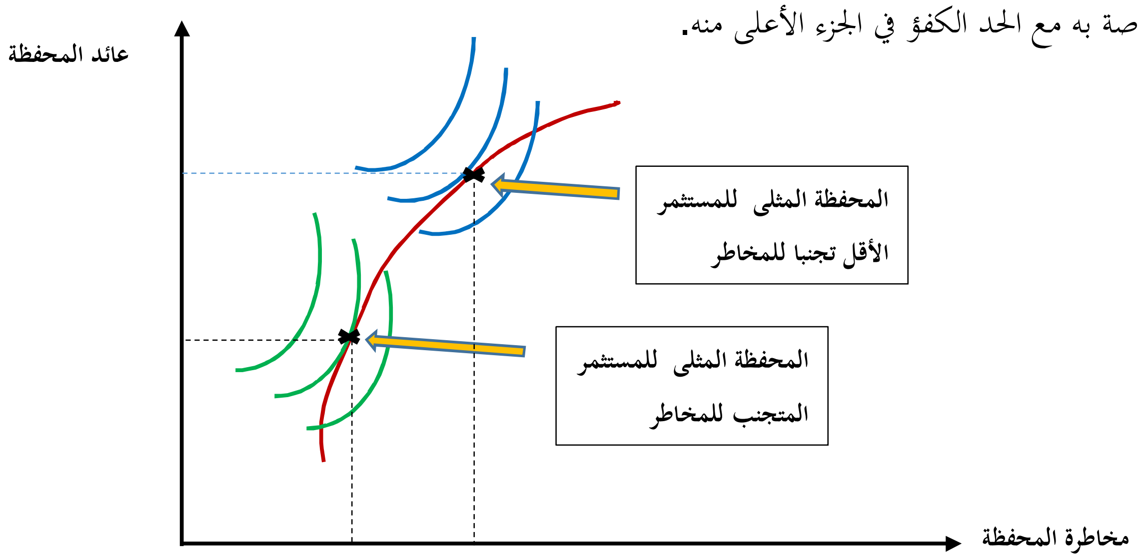
المحور الثالث: نظرية المحفظة والحد الكفؤ.

3- إختيار المحفظة المالية المثلى: وصغ كل من ماركوفيتز (Markowitz model 1952) وتوبين (Tobin model 1958) وشارب (Sharpe model 1963) نماذج توضح كيفية إختيار المحفظة المالية المثلى من بين المحافظ الكفؤةكما هو مبين في التالي:

3-1- نموذج ماركوفيتز: تبين لماركوفيتز إلى أن المستثمر ليس مضطرا لحساب وتحليل جميع المحافظ المالية المتاحة، بل عليه أن يهتم فقط بتلك المحافظ التي تقع على الحد الكفء الذي يوجد عادة في أعلى الشمال الغربي ويتحدد حسب مبدأ الهيمنة أو السيطرة، لأن جميع المحافظ التي تقع على الحد الكفؤ هي محافظ متفوقة على بقية محافظ المجموعة المتاحة. وبعد استخراج الحد الكفؤ يقوم المستثمر باختيار المحفظة المثلى التي تعتمد على درجة تفضيله للعائد ودرجة تجنبه المخاطرة بحيث يختار المحفظة التي تحقق له أعظم منفعة، تتحقق هذه المحفظة بتماس الحد الكفؤ ومنحنى السواء ذو المنفعة الأعلى، ويوضح الشكل أدناه موقع المحفظة الكفوءة لنوعين من المستثمرين، الأول متجنب للمخاطرة وتكون أعلى منفعة يحصل عليها عندما تلتقي أعلى منحنيات السواء الخاصة به مع الحد الكفوء في الجزء الأدنى من الحد الكفؤ، أما المستثمر الأقل تجنبا للمخاطر فإنه سيختار المحفظة التي تلتقي فيها أعلى منحنيات السواء الخاصة به مع الحد الكفؤ في الجزء الأعلى منه.



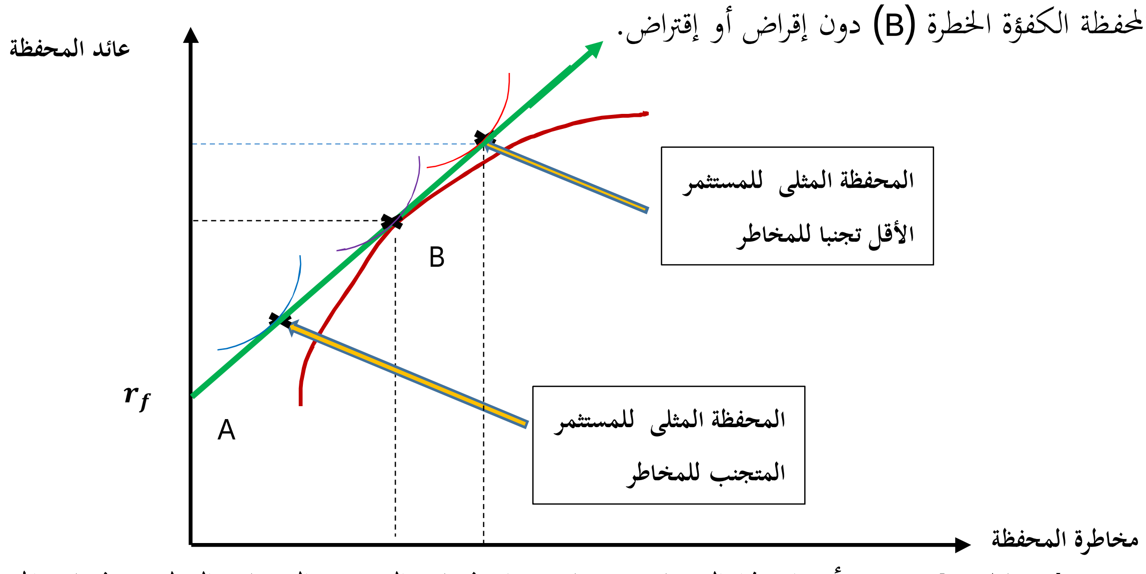
3-2- نموذج توبين: يستند نموذج توبين إلى إفتراض جديد وهو إمكانية المستثمر الإقراض أو الإقتراض بمعدل عائد خالي من المخاطرة وهو العائد الذي لا يحمل أية حالة عدم التأكد، والذي يتصف بالخصائص التالية:

- الإنحراف المعياري له يساوي الصفر؛
- معامل التغاير بين عائد الأصل الخالي من المخاطرة وعائد أي أصل آخر هو معدوم وبالتالي فإن معامل الإرتباط هو أيضا معدوم؛
- يعبر في العادة عن عائد أذونات الخزينة قصيرة الأجل.

ويتم الإقراض عندما يشتري المستثمر أصل خالي من المخاطرة كجزء من المحفظة وعليه فإن النسبة المستثمرة في الأصل الخالي من المخاطرة تكون أكبر من الصفر، بينما النسبة المستثمرة في المحفظة تكون أقل من 100 %. أما

الإقتراض فيحدث عندما يقترض المستثمر مبالغ نقدية مقابل دفع معدل خالي من المخاطرة يستثمرها في المحفظة وبالتالي فإن النسبة المستثمرة في الأصل الخالي من المخاطرة تكون أقل من الصفر، بينما النسبة المستثمرة في المحفظة تكون أكبر من 100 %. يتخذ منحنى الحد الكفؤ أو الفعال في هذه الحالة (كما أشرنا سابقا) شكل خط مستقيم يمتد من معدل العائد الخالي من المخاطرة على المحور العمودي ويلامس أعلى نقطة في الحد الكفؤ الخاص بنموذج ماركوفيتز، هذه النقطة تمثل محفظة كفؤة مكونة من أوراق مالية تنطوي على المخاطرة (تتميز بأنها تقع على الحد الكفؤ لتوبين وماركوفيتز في نفس الوقت)، ويهيمن منحنى الحد الكفؤ لتوبين على الحد الكفؤ لماركوفيتز إلا في هذه المحفظة.

وحسب توبين وبعد تحديد مكان المحفظة الكفؤة الخطرة (التي تقع على الحد الكفؤ لتوبين وماركوفيتز في نفس الوقت وهي النقطة (B) في الشكل)، وبإمكان المستثمر تحديد المحفظة المثلى من أي محفظة على طول الخط المستقيم (الحد الكفؤ) وفقا لتفضيلاته (العائد ودرجة تجنبه للمخاطرة)، فالمستثمر المتجنب للمخاطرة يقوم بإستثمار جزء من أمواله في المحفظة الكفؤة الخطرة والجزء المتبقي يشتري به أصل خالي من المخاطرة، وبالتالي سيكون كما هو مبين في الشكل في أي نقطة على إمتداد الخط (AB) وتسمى محافظ الإقراض. أما المستثمر الأقل تجنبا للمخاطرة فيقوم بالإقتراض بمعدل فائدة خالي من المخاطرة وإستثمارها مع أمواله الممتلكة في المحفظة الكفؤة الخطرة (B) وعليه سيكون في أي نقطة إبتداء من النقطة (B) فما فوق، وتسمى بمحافظ الإقتراض. أو يستثمر المبلغ الممتلك كاملا في المحفظة الكفؤة الخطرة (B) دون إقراض أو إقتراض.



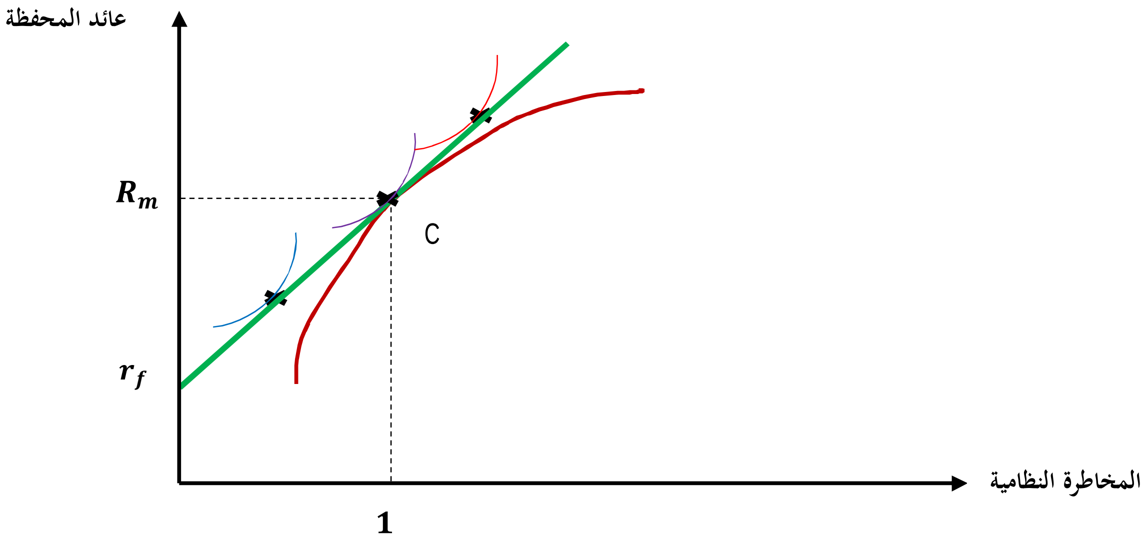
3-3- نموذج شارب: يسمى أيضا هذا النموذج بنموذج بيتا، نموذج السوق، النموذج القطري، نموذج المؤشر الواحد، نموذج العامل الواحد ونموذج العامل العام، قدمه وليام شارب لتبسيط العمليات الحسابية وتخفيض البيانات المطلوبة لنموذج ماركوفيتز، عن طريق ربط عوائد الأوراق المالية إلى أحد مؤشرات سوق الأوراق المالية، وعليه أصبح بناء المحافظ الكفؤة لا يتطلب إستخراج مصفوفة التباين- التباين المشترك بين كل زوج من الأوراق المالية، بل يحسب التباين المشترك بين عوائد أي ورقتين من خلال إستجابتهما لتحركات السوق، التي يجسدها حسب شارب مؤشر

عام (لم يحدد شارب نوع ذلك المؤشر). وحسب نموذج شارب فإن عائد الورقة المالية يتأثر بعاملين هما مؤشر السوق وعوامل عشوائية مستقلة عن السوق خاصة بالشركة المصدرة للورقة المالية.

إفترض شارب أن محفظة السوق (C) منوعة بشكل جيد بإزالة المخاطرة غير النظامية وبالتالي يواجه المستثمر فقط المخاطرة النظامية المقاسة بمعامل بيتا، وحيث أن مخاطرة أي ورقة مالية (أو محفظة) تعتمد على مقدار مساهمتها بمخاطرة محفظة السوق، فإن معدل العائد المتوقع للورقة المالية أو المحفظة يتحدد وفق الصيغة التالية:

$$R_P = r_f + B_i(R_m + r_f)$$

تسمى الصيغة الأخيرة بخط سوق الورقة المالية (SML) (حيث أن R_m يعبر عن عائد السوق، B_i هو معامل بيتا للمحفظة أو الورقة المالية)، ويستطيع المستثمر حسب شارب التحرك على هذا الخط من خلال إستثمار رأسماله بنسب مختلفة في محفظة السوق والأصل الخالي من المخاطرة، ليختار محفظته المثلى التي تمثل نقطة تماس أعلى منحنى سواء للمستثمر مع الحد الكفؤ أو خط سوق الورقة المالية (SML) كما هو مبين في الشكل أسفله:



4- **بناء الحد الكفؤ رياضيا**: لأجل تحقيق ذلك سنقوم ببناء مسألة البرمجة التربيعية لماركوفيتز كما يلي:

- دالة الهدف: $$min\ \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_i W_j\, cov(R_i, R_j)$$
- القيود: $$\begin{cases} R_P = \sum_{i=1}^{n} W_i \times R_i = R^* \\ \sum_{i=1}^{n} W_i = 1 \end{cases}$$

حيث أن: R^* هي معدل عائد متوقع لمحفظة معطى تتراوح قيمته بين أدنى وأعلى عائد للمحفظة.

ولحل هذه المسألة نستخدم تقنية مضاعف لاجرونج التي تدمج دالة الهدف مع القيود، حيث من أجل كل قيمة لـ R^* نحاول تدنية صيغة لاجرونج التالية:

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_i W_j\, cov(R_i, R_j) + \lambda_1\left(\sum_{i=1}^{n} W_i \times R_i - R^*\right) + \lambda_2\left(\sum_{i=1}^{n} W_i - 1\right)$$

نقوم بحساب المشتقات الجزئية لـ Z بدلالة W_i و λ_1 و λ_2 ونجعلها مساوية للصفر، لتعطينا $(n+2)$ معادلة خطية بـ $(n+2)$ مجهول، أي أن:

$$\frac{\partial z}{\partial W_1} = 2W_1\sigma_{11} + 2W_2\sigma_{12} + \cdots + 2W_n\sigma_{1n} + \lambda_1 R_1 + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial W_2} = 2W_1\sigma_{21} + 2W_2\sigma_{22} + \cdots + 2W_n\sigma_{2n} + \lambda_1 R_2 + \lambda_2 = 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial z}{\partial W_n} = 2W_1\sigma_{n1} + 2W_2\sigma_{n2} + \cdots + 2W_n\sigma_{nn} + \lambda_1 R_n + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_1} = W_1R_1 + W_2R_2 + \cdots + W_nR_n - R^* = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_2} = W_1 + W_2 + \cdots + W_n - 1 = 0$$

يمكن كتابة $(n+2)$ معادلة خطية بـ $(n+2)$ مجهول في شكل مصفوفي كما يلي:

$$C.X = \mathrm{K}$$

أو:

$$C \equiv \begin{bmatrix} 2\sigma_{11} & 2\sigma_{12} & \cdots & 2\sigma_{1n} & W_1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 2\sigma_{n1} & 2\sigma_{n2} & & 2\sigma_{nn} & W_n & 1 \\ W_1 & W_2 & \cdots & W_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X \equiv \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} et\ K \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R^* \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبضرب طرفي الشكل المصفوفي $C.X = \mathrm{K}$ في مقلوب المصفوفة C فإن:

$$C^{-1}.C.X = C^{-1}.\mathrm{K}$$

$$\Rightarrow X = C^{-1}.\mathrm{K}$$

وعليه فإن الشعاع X يمثل التوزيع النسبي الأمثل للمحفظة الكفؤة عند كل قيمة لـ R^* معطاة، وبعد تحديد الوزن النسبي يمكن تحديد المخاطرة المرجحة للمحفظة الكفؤة، ثم تحديد باقي المحافظ الكفؤة المشكلة للحد الكفؤ بأخذ قيم R^* بين أدنى وأعلى قيمة يمكن أن يأخذها المعدل المتوقع للمحفظة، وبعد تحديد المحافظ المالية الكفؤة يمكن للمستثمر إختيار المحفظة المثلى التي تعتمد على درجة تفضيله للعائد ودرجة تجنبه المخاطرة.

- مثال 02: لتكن لديك المعطيات المتعلقة بثلاثة أوراق مالية كالتالي:

الورقة المالية	01	02	03
معدل العائد المتوقع	0,07	0,1	0,12
الإنحراف المعياري	0,12	0,15	0,23

بينما معامل الإرتباط بين عوائد كل ورقتين ماليتين هو موضح في الآتي:

الورقة المالية	01	02	03
01	01	0,65	0,15
02	0,65	01	0,3
03	0,15	0,3	01

المطلوب: حدد المحافظ الكفؤة ثم أرسم الخط الفعال أو الحد الكفؤ؟.

- الحل: يتضح من معطيات الجدول الأول أن قيمة R^* لا يمكن أن تكون أقل من 0,07 ولا تتعدى 0,12 في حالة تكوين محفظة من ثلاثة أوراق مالية، ولأجل تحقيق المطلوب ينبغي حسب ماركوفيتز حساب مصفوفة التباين-التغاير للأوراق المالية الثلاثة كمايلي:

الورقة المالية	01	02	03
01	0,0144	0,0117	0,0041
02	0,0117	0,0225	0,0104
03	0,0041	0,0104	0,0529

وعليه يمكن كتابة مسألة البرمجة التربيعية لماركوفيتز:

$$min\ \sigma_P^2 = 0{,}0144W_1^2 + 0{,}0225W_2^2 + 0{,}0529W_3^2 + 2(0{,}0117)W_1W_2 + 2(0{,}0041)W_1W_3 + 2(0{,}0104)W_2W_3$$

$$\begin{cases} R_P = 0{,}07W_1 + 0{,}1W_2 + 0{,}12W_3 = R^* \\ W_1 + W_2 + W_3 = 1 \end{cases}$$

ولحل هذه المسألة نستخدم تقنية مضاعف لاجرونج التي تدمج دالة الهدف مع القيود، حيث من أجل كل قيمة لـ R^* نحاول تدنية صيغة لاجرونج التالية:

$$Z = 0{,}0144W_1^2 + 0{,}0225W_2^2 + 0{,}0529W_3^2 + 2(0{,}0117)W_1W_2 + 2(0{,}0041)W_1W_3 + 2(0{,}0104)W_2W_3 + \lambda_1(0{,}07W_1 + 0{,}1W_2 + 0{,}12W_3 - R^*) + \lambda_2(W_1 + W_2 + W_3 - 1)$$

نقوم بحساب المشتقات الجزئية لـ Z بدلالة W_i و λ_1 و λ_2 ونجعلها مساوية للصفر أي أن:

$$\frac{\partial z}{\partial W_1} = 0{,}0288W_1 + 0{,}0234W_2 + 0{,}0082W_3 + 0{,}07\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial W_2} = 0{,}0234W_1 + 0{,}045W_2 + 0{,}0207W_n + 0{,}1\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial W_3} = 0{,}0082W_1 + 0{,}0207W_2 + 0{,}1058W_n + 0{,}12\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_1} = 0{,}07W_1 + 0{,}1W_2 + 0{,}12W_3 = R^*$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_2} = W_1 + W_2 + W_3 = 1$$

يمكن كتابة المعادلات الأخيرة في شكل مصفوفي كما يأتي:

$$\begin{bmatrix} 0{,}0288 & 0{,}0234 & 0{,}0082 & 0{,}07 & 1 \\ 0{,}0234 & 0{,}045 & 0{,}0207 & 0{,}1 & 1 \\ 0{,}0082 & 0{,}0207 & 0{,}1058 & 0{,}12 & 1 \\ 0{,}07 & 0{,}1 & 0{,}12 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ R^* \\ 1 \end{bmatrix}$$

ومن أجل حساب الشعاع X ينبغي أولا حساب مقلوب المصفوفة C^{-1} كما هو موضح:

$$\begin{bmatrix} 3{,}3250 & -8{,}3126 & 4{,}9875 & -28{,}8113 & 3{,}0741 \\ -8{,}3126 & 20{,}7814 & -12{,}4688 & 22{,}0283 & -1{,}6854 \\ 4{,}9875 & -12{,}4688 & 7{,}4813 & 6{,}7830 & -0{,}3888 \\ -28{,}8113 & 22{,}0283 & 6{,}7830 & -23{,}8500 & 1{,}9275 \\ 3{,}0741 & -1{,}6854 & -0{,}3888 & 1{,}9275 & -0{,}1808 \end{bmatrix}$$

وبضرب طرفي الشكل المصفوفي $C.X = K$ في مقلوب المصفوفة C فإن:

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}3250 & -8{,}3126 & 4{,}9875 & -28{,}8113 & 3{,}0741 \\ -8{,}3126 & 20{,}7814 & -12{,}4688 & 22{,}0283 & -1{,}6854 \\ 4{,}9875 & -12{,}4688 & 7{,}4813 & 6{,}7830 & -0{,}3888 \\ -28{,}8113 & 22{,}0283 & 6{,}7830 & -23{,}8500 & 1{,}9275 \\ 3{,}0741 & -1{,}6854 & -0{,}3888 & 1{,}9275 & -0{,}1808 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ R^* \\ 1 \end{bmatrix}$$

وينبغي لتحديد المحافظ الكفؤة المشكلة للحد الكفؤ إعطاء قيم عددية لـ R^* هي: 0,08 ، 0,09، 0,1، 0,11، 0,12 ونبدأ بالقيمة $R^* = 0{,}08$ ومن ثم فإن :

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}3250 & -8{,}3126 & 4{,}9875 & -28{,}8113 & 3{,}0741 \\ -8{,}3126 & 20{,}7814 & -12{,}4688 & 22{,}0283 & -1{,}6854 \\ 4{,}9875 & -12{,}4688 & 7{,}4813 & 6{,}7830 & -0{,}3888 \\ -28{,}8113 & 22{,}0283 & 6{,}7830 & -23{,}8500 & 1{,}9275 \\ 3{,}0741 & -1{,}6854 & -0{,}3888 & 1{,}9275 & -0{,}1808 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}08 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن الأوزان النسبية للمحفظة الكفؤة في حالة $R^* = 0{,}08$ تكون:

$$\begin{cases} W_1 = 3{,}3250(0) - 8{,}3126(0) + 4{,}9875(0) - 28{,}8113\,(0{,}08) + 3{,}0741(1) = \mathbf{0{,}7692} \\ W_2 = -8{,}3126(0) + 20{,}7814(0) - 12{,}4688(0) + 22{,}0283\,(0{,}08) - 1{,}6854(1) = \mathbf{0{,}0769} \\ W_3 = 4{,}9875(0) - 12{,}4688(0) + 7{,}4813(0) + 6{,}7830\,(0{,}08) - 0{,}3888(1) = \mathbf{0{,}1539} \end{cases}$$

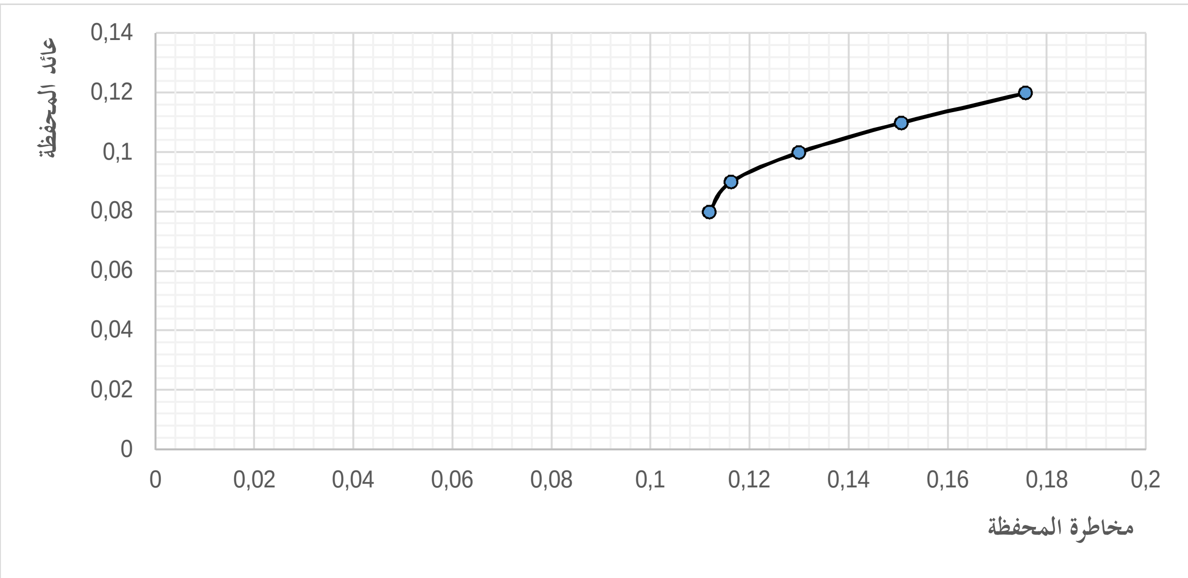
وبتعويض قيم W_1 و W_2 و W_3 في معادلة حساب تباين المحفظة الكفؤة نجد:

$$\sigma_P^2 = 0{,}0144(0{,}7692)^2 + 0{,}0225(0{,}0769)^2 + 0{,}0529(0{,}1539)^2 + 2(0{,}0117)(0{,}7692)(0{,}0769) + 2(0{,}0041)(0{,}7692)(0{,}1539) + 2(0{,}0104)(0{,}0769)(0{,}1539) = \mathbf{0{,}0125}$$

وعليه فإن الإنحراف المعياري للمحفظة يبلغ: $\boldsymbol{\sigma_p} = \mathbf{0{,}1118}$، وبنفس المنهجية مع باقي القيم العددية لـ R^* التي نلخصها في الجدول التالي:

$\boldsymbol{\sigma_p}$	$\boldsymbol{W_3}$	$\boldsymbol{W_2}$	$\boldsymbol{W_1}$	$\boldsymbol{R^*}$
0,1118	0,1539	0,0769	0,7692	0,08
0,1162	0,2217	0,2972	0,4811	0,09
0,1300	0,2895	0,5175	0,1930	0,1
0,1506	0,3574	0,7377	0,0951 -	0,11
0,1757	0,4252	0,9580	0,3832 -	0,12

وإستنادا إلى الجدول أعلاه يمكننا رسم منحنى الحد الكفؤ كما يبينه الشكل الآتي:



ويمكن إستخدام برنامج الإكسل من أجل بناء الحد الكفؤ وحل المثال رقم 02 ضمن الخطوات التالية:

- كتابة مسألة البرمجة التربيعية لماركوفيتز الخاص بالمثال رقم 02 في برنامج الإكسل:

C14 =B13*B13*B3+C13*C13*C4+D13*D13*D5+A11*B13*C13*C3+A11*B13*D13*D3+A11*C13*D13*D4

	A	B	C	D
1			مصفوفة التباين– التغاير	
2	الورقة المالية	1	2	3
3	1	0,0144	0,0117	0,0041
4	2	0,0117	0,0225	0,0104
5	3	0,0041	0,0104	0,0529
6				
7			معدل عائد الورقة	
8	الورقة المالية	1	2	3
9	عائد الورقة	0,07	0,1	0,12
10				
11	2		متغيرات القرار	
12	متغيرات القرار	W1	W2	W3
13		0	0	0
14	دالة الهدف	Min z	0	
15	القيد	C1		
16	القيد	C2		

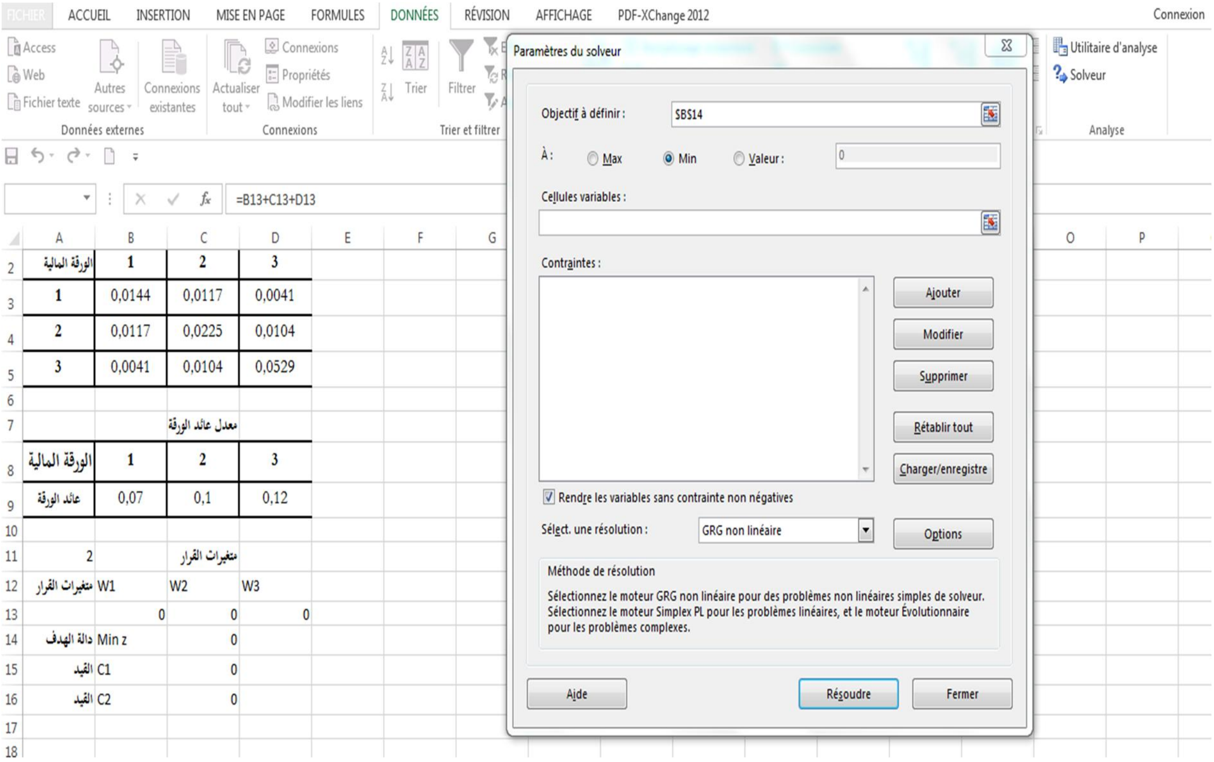
C15 =B13*B9+C13*C9+D13*D9

	A	B	C	D
1			مصفوفة التباين– التغاير	
2	الورقة المالية	1	2	3
3	1	0,0144	0,0117	0,0041
4	2	0,0117	0,0225	0,0104
5	3	0,0041	0,0104	0,0529
6				
7			معدل عائد الورقة	
8	الورقة المالية	1	2	3
9	عائد الورقة	0,07	0,1	0,12
10				
11	2		متغيرات القرار	
12	متغيرات القرار	W1	W2	W3
13		0	0	0
14	دالة الهدف	Min z	0	
15	القيد	C1	0	
16	القيد	C2		

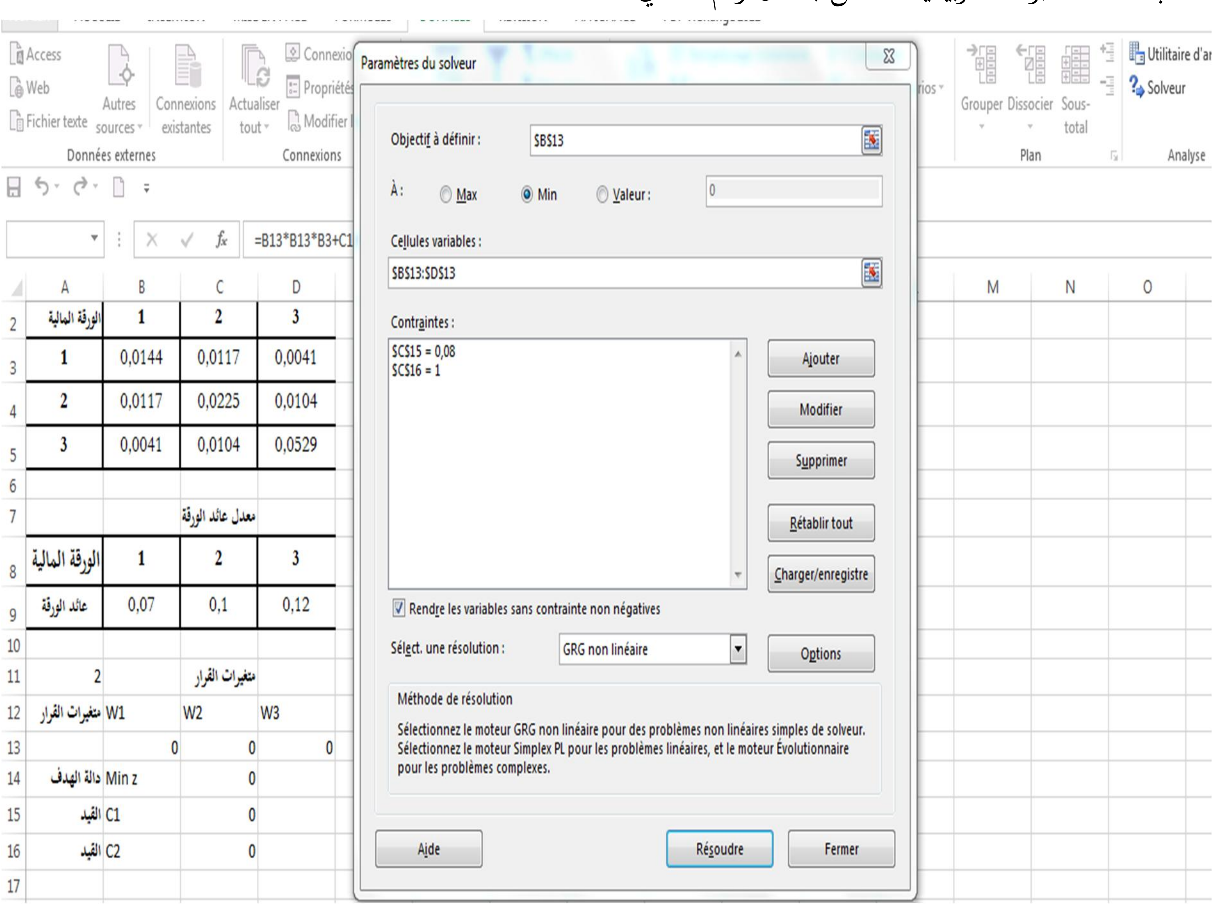
C16 =B13+C13+D13

	A	B	C	D
2	الورقة المالية	1	2	3
3	1	0,0144	0,0117	0,0041
4	2	0,0117	0,0225	0,0104
5	3	0,0041	0,0104	0,0529
6				
7			معدل عائد الورقة	
8	الورقة المالية	1	2	3
9	عائد الورقة	0,07	0,1	0,12
10				
11	2		متغيرات القرار	
12	متغيرات القرار	W1	W2	W3
13		0	0	0
14	دالة الهدف	Min z	0	
15	القيد	C1	0	
16	القيد	C2	0	
17				

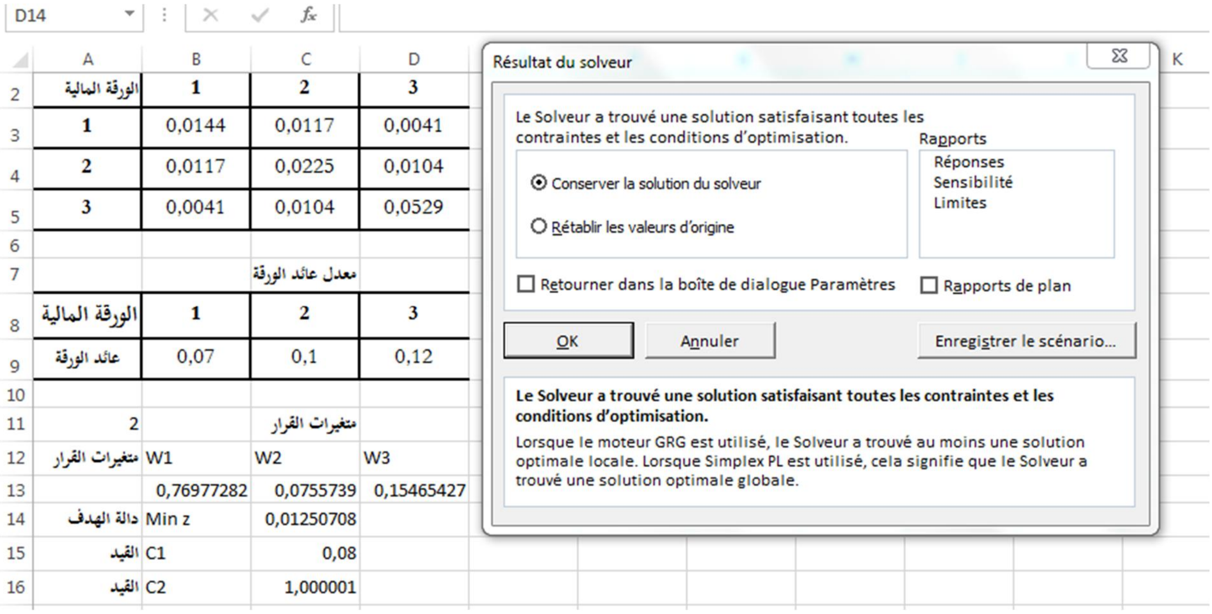
بعد كتابة دالة الهدف والقيود في برنامج الإكسل كما هو موضح في الصفحة السابقة، نذهب الآن إلى DONNEE ونبحث عن أداة Solveur ونضغط عليها فتظهر النافذة المبينة في التالي:



نكتب مسألة البرمجة التربيعية الخاص بالمثال رقم 02 في أداة Solveur:

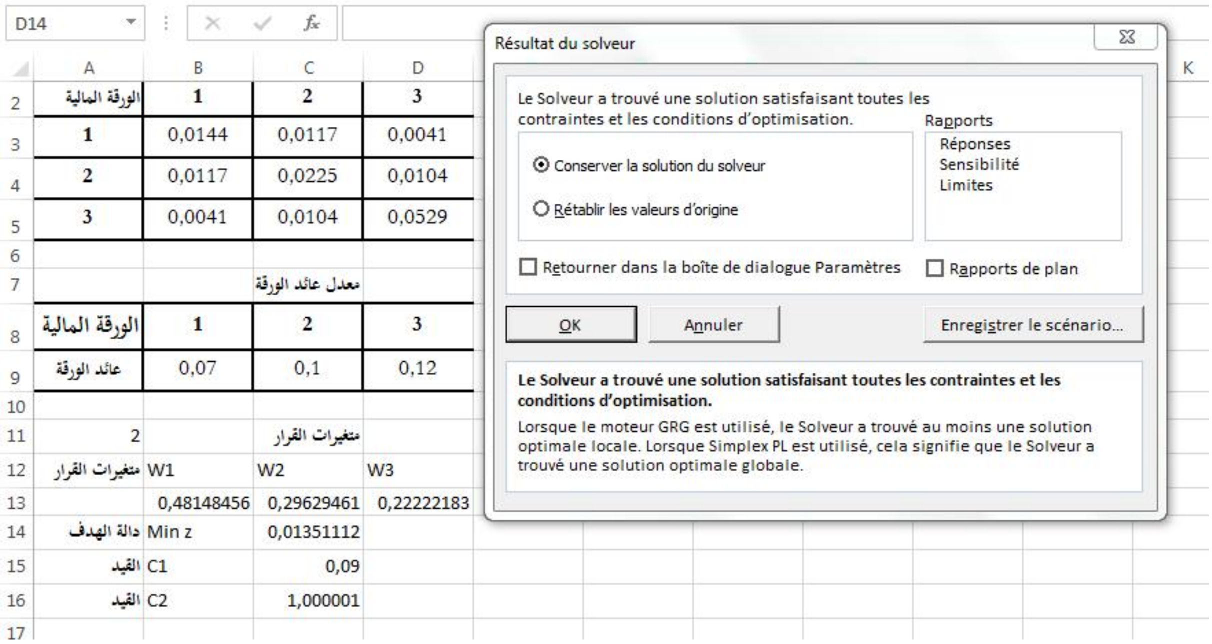


نضغط على الأيقونة Résoudre فتظهر لنا الحلول في حالة أخذ R^* قيمة 0,08:



	A	B	C	D
2	الورقة المالية	1	2	3
3	1	0,0144	0,0117	0,0041
4	2	0,0117	0,0225	0,0104
5	3	0,0041	0,0104	0,0529
6				
7			معدل عائد الورقة	
8	الورقة المالية	1	2	3
9	عائد الورقة	0,07	0,1	0,12
10				
11	2		متغيرات القرار	
12	متغيرات القرار	W1	W2	W3
13		0,76977282	0,0755739	0,15465427
14	دالة الهدف	Min z	0,01250708	
15	القيد	C1	0,08	
16	القيد	C2	1,000001	

وبنفس المنهجية بأخذ R^* قيمة 0,09 فنحصل على:



	A	B	C	D
2	الورقة المالية	1	2	3
3	1	0,0144	0,0117	0,0041
4	2	0,0117	0,0225	0,0104
5	3	0,0041	0,0104	0,0529
6				
7			معدل عائد الورقة	
8	الورقة المالية	1	2	3
9	عائد الورقة	0,07	0,1	0,12
10				
11	2		متغيرات القرار	
12	متغيرات القرار	W1	W2	W3
13		0,48148456	0,29629461	0,22222183
14	دالة الهدف	Min z	0,01351112	
15	القيد	C1	0,09	
16	القيد	C2	1,000001	
17				

وهكذا لباقي قيم R^*، وحسب تحليل الحساسية المبين في الجدول أدناه نلاحظ أن إذا تغير معدل عائد المحفظة الكفؤة بـ 01 % فإن مخاطرتها مقاسة بالتباين تتغير بـ 0,01917 %.

Cellule	Nom	finale Valeur	de Lagrange Multiplicateur
C15	C1 W2	0,080001	-0,019166508
C16	C2 W2	1,000001	0,026547474