في حالة وجود أكثر من متغيرين للمسألة لا يمكن إستخدام الطريقة البيانية و لذلك لابد من إستخدام طريقة أخرى مثل الطريقة المبسطة أو السمبلاكس التي إبتكرها Dantzing George عام 1947، و هي عبارة عن مجموعة من العمليات و المراحل المتكررة بحيث كل مرحلة تمثل حلا ممكنا أفضل من سابقه و هكذا ... إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل ، كما تسمح هذه الطريقة بدراسة تأثير مختلف المتغيرات و القيود على دالة الهدف.

يتم الحل بطريقة السمبلاكس وفق الخطوات التالية :

الحالة الأولى : إذا كانت القيود من نوع أصغر أو يساوي (≤).

مثال توضيحي : أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي بالطريقة المبسطة :

$$Max\ Z = 100x_1 + 60x_2$$
$$S/C \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \le 40 \\ 6x_1 + 9x_2 \le 108 \\ 8x_1 + 6x_2 \le 96 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

كتابة الشكل المعياري : حيث يتم كتابة كل المتراجحات في شكل معادلات إضافة إلى تحقيق شرط عدم السالبية في حالة عدم تحققه.

بما أن كل القيود من نوع أصغر أو يساوي (≤) يتم إضافة متغيرات الفرق أو الفجوة (e_i) للطرف الأصغر، حيث تمثل هذه الأخيرة الطاقات غير المستغلة من كل قيد و هي أيضا غير سالبة.

أما بالنسبة لدالة الهدف فتضاف إليها متغيرات الفجوة بمعاملات صفرية، فيصبح البرنامج كالتالي :

1. $Max\ Z = 100x_1 + 60x_2 + 0e_1 + 0\,e_2 + 0e_3$

$$S/C \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + \boldsymbol{e_1} = 40 \\ 6x_1 + 9x_2 + \boldsymbol{e_2} = 108 \\ 8x_1 + 6x_2 + \boldsymbol{e_3} = 96 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \\ \boldsymbol{e_1 \ge 0,\ e_2 \ge 0,\ e_3 \ge 0} \end{cases}$$

تحويل دالة الهدف إلى معادلة صفرية :

$$Z - cj = -100x_1 - 60x_2 = 0$$

تشكيل الحل القاعدي : حيث يتم ترتيب معطيات النموذج في جدول بغرض الشروع في عملية تحسين الحل ، يشكل هذا الجدول الأولي ما يسمى بالحل القاعدي أو الأساسي، يحتوي على متغيرات الفجوة كمتغيرات داخل الأساس، أما المتغيرات الحقيقية فنعتبرها متغيرات خارج الأساس قيمتها في الجدول الأولي معدومة و كذلك قيمة دالة الهدف يكون على الشكل التالي :

1. **جدول الحل الأساسي الأول أو الحل القاعدي :** نقوم بترتيب معطيات النموذج في جدول السمبلاكس و الذي يأخذ الشكل التالي :

VHB / VB	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
e_1	8	2	1	0	0	40	$\frac{40}{8} = 5$ ←
e_2	6	9	0	1	0	108	$\frac{108}{6} = 18$
e_3	8	6	0	0	1	96	$\frac{96}{8} = 12$
Z-cj	-100	-60	0	0	0	0	

↑

تحسين الحل :

إنطلاقا من الحل القاعدي نشرع في عملية تحسين الحل حتى الوصول للحل الأمثل حيث تتم عملية التحسين بإتباع الخطوات التالية:

1. **تحديد المتغيرة الداخلة** :هي المتغيرة التي تقابل أكبر قيمة موجبة في سطر Z-cj في حالة التدنئة (Min Z) أو التي تقابل أقل قيمة سالبة في سطر Z-cj في حالة التعظيم (Max Z) و التي تقابل القيمة (-100)في مثالنا أي أن x_1 هي المتغيرة الداخلة.
2. **تحديد المتغيرة الخارجة**: إن إدخال متغيرة إلى الأساس يتطلب بالضرورة إخراج متغيرة أخرى و التي يتم تحديدها كالآتي:

نقسم مختلف عناصر عمود الموارد المتاحة (b_i) على العناصر المقابلة له في عمود المتغيرة الداخلة (a_{ik}) ثم نختار أقل قيمة موجبة بين النتائج المتحصل عليها من حاصل قسمة $(\frac{b_i}{a_{ik}})$ سواءا في حالة التعظيم أو التدنئة مع إهمال القيم السالبة و الغير محددة $(\frac{b_i}{0} = \infty)$ ، حيث k يشير إلى عمود المتغيرة الداخلة، و بالتالي فالمتغيرة الخارجة في مثالنا هي المقابلة لأقل حاصل قسمة (5) و الذي يقابل المتغيرة (e_1).

3. **تحديد العنصر المحوري أو عنصر الإرتكاز " Pivot** ": هو المعامل الذي يتقاطع عنده سطر المتغيرة الخارجة مع عمود المتغيرة الداخلة و التي يقابل في مثالنا **المعامل** (a_{11} = 8).
4. بعد تحديد العنصر المحوري و إستبدال العنصر الخارج بالعنصر الداخل في عمود متغيرات الأساس يتغير الجدول الموالي و تحسب مختلف عناصره من جديد وفقا لما يلي :

- نقسم جميع قيم سطر المحور على قيمة العنصر المحوري و التي تسمى معادلة المحور على النحو التالي:

$$\text{معادلة المحور} = \frac{\text{سطر عنصر الإرتكاز}}{\text{عنصرالإرتكاز}} = \frac{8 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 40}{8} = 1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad 0 \quad 0 \quad 5$$

- نحدد مصفوفة الوحدة و التي تتشكل من المتغيرات داخل الأساس في مثالنا (x_1، e_2 ، e_3).

بحيث تكون قيمة تقاطع متغير الأساس مع نفسه تساوي الواحد الصحيح أما بقية العمود فيكون مساويا للصفر.

- أما باقي قيم الجدول فيمكن تحديدها بالعلاقة التالية:

قيمة العنصر الجديد = قيمة العنصر القديم - $\frac{\text{قيمة عنصر عمود الإرتكاز} \times \text{قيمة عنصر سطر المحور}}{\text{قيمة العنصر المحوري}}$

و بالتطبيق على مثالنا سوف نجد قيم: a_{22} ، a_{23} ، b_2 وفقا للعلاقة السابقة كما يلي :

$$a_{22} = 9 - \frac{2\times 6}{8} = \frac{15}{2}$$

$$a_{23} = 0 - \frac{1\times 6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$b_2 = 108 - \frac{40\times 6}{8} = 78$$

أو بطريقة أخرى :

السطر الجديد = السطر القديم – معامل العنصر الداخل في هذا السطر× (معادلة المحور)

و بالتطبيق على مثالنا سوف يصبح الجدول الجديد على الشكل التالي :

VHB / VB	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
x_1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	0	5	$5\times 4 = 20$
e_2	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{-3}{4}$	1	0	78	$78 \times \frac{2}{15}$ ←
e_3	0	4	-1	0	1	56	$\frac{56}{4} = 14$
Z-cj	0	-35 ↑	$\frac{25}{2}$	0	0	0	500

نلاحظ من خلال الجدول أن هذا الحل أفضل من الحل السابق لكن ليس حلا أمثلا لوجود قيمة سالبة في سطر Z-cj، حيث يمكن تحسينه و بالتالي نقوم بتكرار العملية إلى أن نصل إلى الحل الأمثل و الذي يتحقق بتحقق شرط الأمثلية.

ملاحظة : يتحقق شرط الأمثلية وفق مايلي :

في حالة الدالة من نوع $Max\ Z$ بما أن عنصر الدخول هو أقل قيمة سالبة إذن يتحقق شرط الأمثلية عندما تصبح كل قيم سطر Z-cj أكبر أو تساوي الصفر.

العكس في حالة الدالة من نوع $Min\ Z$: بما أن عنصر الدخول هو أكبر قيمة موجبة إذن يتحقق شرط الأمثلية عندما تصبح كل قيم سطر Z-cj أقل أو تساوي الصفر .

إذن نواصل تحسين الحل بنفس الطريقة حتى يتحقق شرط الأمثلية :

تحديد المتغيرة الداخلة :هي المتغيرة التي تقابل أقل قيمة سالبة في سطر Z-cj و التي تقابل (-35) إذن في مثالنا x_2 هي المتغيرة الداخلة.

تحديد المتغيرة الخارجة : أقل قيمة موجبة بين النتائج المتحصل عليها من حاصل قسمة $(\frac{b_i}{a_{i2}})$ هو $\frac{78\times 2}{15}$ و بالتالي فالمتغيرة الخارجة في مثالنا هي المقابلة للمتغيرة (e_2).

تحديد العنصر المحوري أو عنصر الإرتكاز " Pivot ": هو المعامل الذي يتقاطع عنده سطر المتغيرة الخارجة مع عمود المتغيرة الداخلة و التي يقابل في مثالنا **المعامل** ($a_{22} = \frac{15}{2}$).

بعد تحديد العنصر المحوري و إدخال و إخراج المتغيرات يتغير الجدول الموالي و تحسب مختلف عناصره من جديد وفقا لما يلي :

- نقسم جميع قيم سطر المحور على قيمة العنصر المحوري و التي تسمى معادلة المحور على النحو التالي:

معادلة المحور = $\frac{\text{سطر عنصر الإرتكاز}}{\text{عنصر الإرتكاز}}$ = $\frac{0 \quad \frac{15}{2} \quad \frac{-3}{4} \quad 1 \quad 0 \quad 78}{\frac{15}{2}}$ = $\mathbf{0 \quad 1 \quad \frac{-1}{10} \quad \frac{2}{15} \quad 0 \quad \frac{156}{15}}$

- نحدد مصفوفة الوحدة و التي تتشكل من المتغيرات داخل الأساس في مثالنا ($\boldsymbol{x_1}$، $\boldsymbol{x_2}$ ، $\boldsymbol{e_3}$).

بحيث تكون قيمة تقاطع متغير الأساس مع نفسه تساوي الواحد الصحيح أما بقية العمود فيكون مساويا للصفر.

- أما باقي قيم الجدول فيمكن تحديدها بالعلاقة التالية:

السطر الجديد = السطر القديم – معامل العنصر الداخل في هذا السطر$\times$ (معادلة المحور)

و بالتطبيق على مثالنا سوف نجد و بعد إختزال بعد الكسور يصبح الجدول الجديد على الشكل التالي :

VHB / VB	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i
x_1	1	0	$\frac{3}{20}$	$\frac{-1}{30}$	0	$\frac{12}{5}$
x_2	0	1	$\frac{-1}{10}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{52}{5}$
e_3	0	0	$\frac{-3}{5}$	$\frac{-8}{15}$	1	$\frac{72}{5}$
Z-cj	0	0	9	$\frac{14}{3}$	0	864

نلاحظ من خلال الجدول أن هذا الحل أفضل من الحل السابق و لا يمكن تحسينه لأن قيم سطر Z-cj ≥ 0 كلها موجبة أو معدومة و منه تحقق شرط الأمثلية و بالتالي هذا الجدول يمثل الحل الأمثل و الذي يتمثل في:

$\boldsymbol{x_1 = \frac{12}{5}}$	$\boldsymbol{x_2 = \frac{52}{5}}$
$\boldsymbol{e_1 = 0}$	$\boldsymbol{e_2 = 0}$
$\boldsymbol{e_3 = \frac{72}{5}}$	$\boldsymbol{Z = 864}$

مثال 2: أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي بالطريقة المبسطة

$$Max\ Z = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3$$

$$S/C \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 200 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

كتابة الشكل المعياري :

$$Max\ Z = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

$$S/C \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + e_1 = 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + e_2 = 120 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + e_3 = 200 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0,\ e_3 \geq 0 \end{cases}$$

تحويل دالة الهدف إلى معادلة صفرية :

$$Z - cj = -6x_1 - 7x_2 - 8x_3 = 0$$

تشكيل جدول الحل القاعدي أو الحل الأساسي الأول :

VB \ VHB	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
e_1	1	2	1	1	0	0	100	$\frac{100}{1} = 100$
e_2	3	4	2	0	1	0	120	$\frac{120}{2} = 60$
e_3	2	6	4	0	0	1	200	$\frac{200}{4} = 50$ ←
Z-cj	6-	7-	8-	0	0	0	0	

تحسين الحل :

تحديد المتغيرة الداخلة : التي تقابل أقل قيمة سالبة في سطر Z-cj و التي تقابل القيمة (-8) أي أن x_3 هي المتغيرة الداخلة.

تحديد المتغيرة الخارجة : أقل قيمة موجبة بين النتائج المتحصل عليها من حاصل قسمة $(\frac{b_i}{a_{ik}})$ هي المقابلة لأقل حاصل قسمة (50) و الذي يقابل المتغيرة (e_3).

تحديد العنصر المحوري أو عنصر الارتكاز " Pivot ": هو المعامل الذي يتقاطع عنده سطر المتغيرة الخارجة مع عمود المتغيرة الداخلة و التي يقابل في مثالنا المعامل (a_{33} = 4).

نقسم جميع قيم سطر المحور على قيمة العنصر المحوري و التي تسمى معادلة المحور على النحو التالي :

معادلة المحور = $\frac{\text{سطر عنصر الارتكاز}}{\text{عنصر الارتكاز}} = \frac{2\quad 6\quad 4\quad 0\quad 0\quad 1\quad 200}{4} = \frac{1}{2}\quad \frac{3}{2}\quad 1\quad 0\quad 0\quad \frac{1}{4}\quad 50$

- نحدد مصفوفة الوحدة و التي تتشكل من المتغيرات داخل الأساس في مثالنا (e_1 ، e_2 ، x_3).
- أما باقي قيم الجدول فيمكن تحديدها:

السطر الجديد = السطر القديم – معامل العنصر الداخل في هذا السطر× (معادلة المحور)

و بالتطبيق على مثالنا سوف يصبح الجدول الجديد على الشكل التالي :

VHB / VB	x_1	x_2	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i	$\frac{b_i}{a_{ik}}$
e_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{-1}{4}$	50	$50 \times 2 = 100$
e_2	2	1	0	0	1	$\frac{-1}{2}$	20	$\frac{20}{2}$=10 ←
x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	50	$50 \times 2 = 100$
Z-cj	-2 ↑	5	0	0	0	2	400	

نلاحظ من خلال الجدول أن هذا الحل أفضل من الحل السابق لكن ليس حلا أمثلا حيث يمكن تحسينه و بالتالي نواصل تحسين الحل بنفس الطريقة حتى يتحقق شرط الأمثلية :

و منه يصبح الجدول الجديد على الشكل التالي :

VHB / VB	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	0	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	45
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	10
x_3	0	$\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	45
Z-cj	0	6	0	0	1	$\frac{3}{2}$	420

نلاحظ من خلال الجدول أن هذا الحل أفضل من الحل السابق و لا يمكن تحسينه لأن قيم سطر Z-cj كلها موجبة أو معدومة و منه تحقق شرط الأمثلية و بالتالي هذا الجدول يمثل الحل الأمثل و الذي يتمثل في:

$x_1 = 10$	$e_1 = 45$
$x_2 = 0$	$e_2 = 0$
$x_3 = 45$	$e_3 = 0$

$$Z = 420$$

- **حالة القيود من نوع أكبر أو تساوي (≥) أو مساواة (=):**

➢ **طريقة M الكبيرة (La méthode de Big M):**

رأينا سابقا أن الهدف من متغيرات الفجوة هو تحقيق التوازن في القيود أي تحقيق المساواة إضافة إلى الحصول على مصفوفة الوحدة لكن في حالة القيود من نوع أكبر أو تساوي (≥) أو مساواة (=) لا يمكن تحقيق شرط مصفوفة الوحدة، مما يصعب تطبيق طريقة السمبلاكس العادية ، لذلك يجرى تغيير طفيف عليها:

- في حالة القيود من نوع أكبر أو تساوي (≥) تطرح متغيرات الفجوة للطرف الأكبر من أجل تحقيق التوازن أو المساواة بين طرفي المتراجحة و بما أن متغيرات الفجوة تأخذ إشارة سالبة لا يمكن تحقيق شرط مصفوفة الوحدة وبالتالي تضاف متغيرات صورية أو وهمية تدعى المتغيرات الإصطناعية قيمتها معدومة و معاملها واحد نرمز لها A من أجل تحقيق مصفوفة الوحدة.
- أما بالنسبة للقيود من نوع مساواة (=) بما أن شرط التوازن محقق تضاف مباشرة المتغيرات الإصطناعية.
- كما تجرى تغييرات على دالة الهدف حيث تضاف إليها المتغيرات الإصطناعية بمعاملات كبيرة جدا نرمز لها M بإشارة موجبة عندما تكون دالة الهدف من نوع $Min\ Z$ و هذا حتى تكون المتغيرات المصاحبة له من أول المتغيرات التي تخرج من الأساس لأن مقتضى تصغير الدالة يتطلب إخراج المتغيرات ذات المعاملات الأكبر و العكس في حالة الدالة من نوع $Max\ Z$ حيث تطرح منها المتغيرات الإصطناعية بمعاملات كبيرة جدا M .

مثال توضيحي : أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي بطريقة M الكبيرة (Big M)

$$Min\ Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$S/C\begin{cases} -2\,x_1 + 3x_2 = 3 \\ 4\,x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

كتابة الشكل المعياري : حيث يتم كتابة كل المتراجحات في شكل معادلات إضافة إلى تحقيق شرط عدم السالبية في حالة عدم تحققه.

بما أن القيد الأول من نوع مساواة (=) يتم إضافة المتغير الإصطناعي مباشرة لطرف الإستخدامات ، أما بالنسبة للقيد الثاني فبما أنه من نوع أكبر أو يساوي (≥) يتم طرح متغير الفجوة للطرف الأكبر لتحقيق المساواة ثم إضافة المتغير الإصطناعي لتحقيق مصفوفة الوحدة ، أما القيد الثالث فبما أنه من نوع أصغر أو يساوي (≤) يتم إضافة متغير الفجوة للطرف الأصغر. أما دالة الهدف فتضاف إليها متغيرات الفجوة بمعاملات صفرية أما المتغيرات الإصطناعية فبما أن الدالة من نوع $Min\ Z$ فتضاف إليها بمعاملات كبيرة جدا ، فيصبح البرنامج كالتالي :

$$Min\ Z = 2x_1 + 3x_2 + 0e_2 + 0e_3 + M(A_1 + A_2)$$

$$S/C\begin{cases} -2\,x_1 + 3x_2 + A_1 = 3 \\ 4\,x_1 + 5x_2 - e_2 + A_2 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + e_3 = 5 \\ x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0\,,\ e_1 \geq 0\,,\ e_2 \geq 0,\ e_3 \geq 0 \\ A_1 \geq 0\,,\ A_2 \geq 0 \end{cases}$$

نقوم بحساب مجموع المتغيرات الإصطناعية و تعويضها في دالة الهدف نجد

$$A_1 = 3 + 2\,x_1 - 3x_2$$

$$A_2 = 10 - 4\,x_1 - 5x_2 + e_2$$

$$A_1 + A_2 = 13 - 2x_1 - 8x_2 + e_2$$
$$Z = 2x_1 + 3x_2 + M(13 - 2x_1 - 8x_2 + e_2)$$

نقوم بالنشر و جمع العناصر المشتركة نتحصل على :

$$Z = 2x_1 + 3x_2 + 13M - 2Mx_1 - 8Mx_2 + Me_2)$$
$$Z = (2 - 2M)x_1 + (3x_2 - 8M)x_2 + Me_2 + 13M$$
$$Z - cj == (-2 + 2M)x_1 + (-3 + 8M)x_2 - Me_2 = 13M$$

تشكيل جدول الحل القاعدي : حيث يتم ترتيب معطيات النموذج في جدول بغرض الشروع في عملية تحسين الحل ، يشكل هذا الجدول الأولي ما يسمى بالحل القاعدي أو الأساسي، يحتوي على متغيرات الفجوة الموجبة فقط و المتغيرات الإصطناعية كمتغيرات داخل الأساس.

VHB / VB	x_1	x_2	e_2	e_3	A_1	A_2	b_i	$\frac{b_i}{a_{i2}}$
A_1	-2	3	0	0	1	0	3	$\frac{3}{3} = 1$ ←
A_2	4	5	1-	0	0	1	10	$\frac{10}{5} = 2$
e_3	1	2	0	1	0	0	5	$\frac{5}{2} = 2{,}5$
Z-cj	-2+2M	-3+8M	-M	0	0	0	13M	

تحسين الحل :

تحديد المتغيرة الداخلة : التي تقابل أكبر قيمة موجبة في سطر Z-cj و التي تقابل القيمة (-3+8M) أي أن x_2 هي المتغيرة الداخلة.

تحديد المتغيرة الخارجة : أقل قيمة موجبة بين النتائج المتحصل عليها من حاصل قسمة $(\frac{b_i}{a_{i2}})$ هي المقابلة لأقل حاصل قسمة (1) و الذي يقابل المتغيرة (A_1).

تحديد العنصر المحوري أو عنصر الإرتكاز " Pivot ": هو المعامل الذي يتقاطع عنده سطر المتغيرة الخارجة مع عمود المتغيرة الداخلة و التي يقابل في مثالنا المعامل (a_{12} = 3).

أولا نقوم بحساب سطر A_2 في الجدول الجديد و ذلك بقسمة جميع قيم سطر المحور على قيمة العنصر المحوري و التي تسمى معادلة المحور على النحو التالي :

معادلة المحور = $\frac{\text{سطر عنصر الإرتكاز}}{\text{عنصر الإرتكاز}}$ = $\frac{-2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 3}{3}$ = $\frac{-2}{3} \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 1$

- نحدد مصفوفة الوحدة و التي تتشكل من المتغيرات داخل الأساس في مثالنا (x_2، A_2، e_3).
- أما باقي قيم الجدول فيمكن تحديدها بالعلاقة التالية:

قيمة العنصر الجديد = قيمة العنصر القديم - $\frac{\text{قيمة عنصر عمود الإرتكاز} \times \text{قيمة عنصر سطر المحور}}{\text{قيمة العنصر المحوري}}$

أو العلاقة التالية:

السطر الجديد = السطر القديم – معامل العنصر الداخل في هذا السطر $\times$ (معادلة المحور)

و بالتطبيق على مثالنا سوف يصبح الجدول الجديد على الشكل التالي :

VHB / VB	x_1	x_2	e_2	e_3	A_2	b_i	$\frac{b_i}{a_{i1}}$
x_2	$\frac{-2}{3}$	1	0	0	0	1	قيمة سالبة تهمل/
A_2	$\frac{22}{3}$	0	-1	0	1	5	$\frac{5\times3}{22}=\frac{15}{22}$ ←
e_3	$\frac{7}{3}$	0	0	1	0	3	$\frac{3\times3}{7}=\frac{9}{7}$
Z-cj	$-4+\frac{22M}{3}$	0	_M	0	0	3+5M	

نلاحظ من خلال الجدول أن هذا الحل أفضل من الحل السابق حيث إنخفضت قيمة دالة الهدف لكن ليس حلا أمثلا حيث يمكن تحسينه و ذلك لوجود قيم موجبة و بالتالي نواصل تحسين الحل بنفس الطريقة حتى يتحقق شرط الأمثلية :

تحديد المتغيرة الداخلة :هي المتغيرة التي تقابل أكبر قيمة موجبة في سطر Z-cj و التي تقابل $(-4+\frac{22M}{3})$ إذن x_1 هي المتغيرة الداخلة.

تحديد المتغيرة الخارجة : أقل قيمة موجبة بين النتائج المتحصل عليها من حاصل قسمة $(\frac{b_i}{a_{i1}})$ هو $\frac{15}{22}$ و بالتالي فالمتغيرة الخارجة في مثالنا هي المقابلة المتغيرة (A_2).

تحديد العنصر المحوري أو عنصر الإرتكاز " Pivot ": هو المعامل الذي يتقاطع عنده سطر المتغيرة الخارجة مع عمود المتغيرة الداخلة و التي يقابل في مثالنا المعامل $(\frac{22}{3}=a_{21})$.

بعد تحديد العنصر المحوري و إدخال و إخراج المتغيرات يتغير الجدول الموالي و تحسب مختلف عناصره من جديد بنفس الطريقة السابقة. و منه يصبح الجدول الجديد على الشكل التالي :

VHB / VB	x_1	x_2	e_2	e_3	b_i
x_2	0	1	$\frac{-1}{11}$	0	$\frac{16}{11}$
x_1	1	0	$\frac{-3}{22}$	0	$\frac{15}{22}$
e_3	0	0	$\frac{7}{22}$	1	$\frac{31}{22}$
Z-cj	0	0	$\frac{-6}{11}$	0	$\frac{63}{11}$

نلاحظ من خلال الجدول أن هذا الحل أفضل من الحل السابق و لا يمكن تحسينه لأن قيم سطر Z-cj كلها سالبة أو معدومة و منه تحقق شرط الأمثلية و بالتالي هذا الجدول يمثل الحل الأمثل و الذي يتمثل في:

$\boldsymbol{x_1=\frac{15}{22}}$ $\boldsymbol{e_2=0}$

$\boldsymbol{x_2=\frac{16}{11}}$ $\boldsymbol{e_3=\frac{31}{22}}$ $\boldsymbol{Z=\frac{63}{11}}$

مثال توضيحي : تعظيم $Max\ Z$

$$Max\ Z = 2x_1 + 5x_2$$
$$S/C \begin{cases} x_1 \le 400 \\ x_2 \le 300 \\ x_1 + x_2 = 600 \\ x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

كتابة الشكل المعياري : بما أن القيد الأول و الثاني من نوع أصغر أو يساوي (≤) يتم إضافة متغير الفجوة للطرف الأصغر، أما بالنسبة للقيد الثالث فبما أنه من نوع مساواة (=) يتم إضافة المتغير الإصطناعي مباشرة لطرف الإستخدامات أما دالة الهدف فتضاف إليها متغيرات الفجوة بمعاملات صفرية أما المتغيرات الإصطناعية فبما أن الدالة من نوع $Max\ Z$ فتطرح منها بمعاملات كبيرة جدا ، فيصبح البرنامج كالتالي :

$$Max\ Z = 2x_1 + 5x_2 + 0e_1 + 0e_2 - M(A)$$
$$\begin{cases} x_1 + e_1 = 400 \\ x_2 + e_2 = 300 \\ x_1 + x_2 + A = 600 \\ x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0\ ,\ e_1 \ge 0\ ,\ e_2 \ge 0,\ A \ge 0 \end{cases}$$

$$A = 600 - x_1 - x_2$$
$$Z = 2x_1 + 5x_2 - M(600 - x_1 - x_2)$$
$$Z = 2x_1 + 5x_2 - 600M + M\,x_1 + Mx_2$$
$$Z = (2 + M)x_1 + (3 + M)x_2 - 600M$$
$$Z - cj == (-2 - M)x_1 + (-5 - M)x_2 = -600M$$

تشكيل جدول الحل القاعدي :

VHB / VB	x_1	x_2	e_1	e_2	A	b_i	$\frac{b_i}{a_{i2}}$
e_1	1	10	1	0	0	400	$\frac{400}{0} = \infty$ تهمل
e_2	0	1	0	1	0	300	$\frac{300}{1} = 300$ ←
A	1	1	0	0	1	600	$\frac{600}{1} = 600$
Z-cj	-2-M	-5-M	0	0	0	-600M	

تحسين الحل :

تحديد المتغيرة الداخلة : التي تقابل أقل قيمة سالبة في سطر Z-cj و التي تقابل القيمة (-5-M) أي أن x_2 هي المتغيرة الداخلة.

تحديد المتغيرة الخارجة : أقل قيمة موجبة بين النتائج المتحصل عليها من حاصل قسمة $(\frac{b_i}{a_{i2}})$ هي المقابلة لأقل حاصل قسمة (300) و الذي يقابل المتغيرة (e_2).

أولا نقوم بحساب سطر e_2 في الجدول الجديد و ذلك بقسمة جميع قيم سطر المحور على قيمة العنصر المحوري و التي تسمى معادلة المحور على النحو التالي :

معادلة المحور = $\frac{\text{سطر عنصر الإرتكاز}}{\text{عنصر الإرتكاز}}$ = $\frac{0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 300}{1}$ = $0\quad 1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 300$

- نحدد مصفوفة الوحدة و التي تتشكل من المتغيرات داخل الأساس في مثالنا (A، x_2، e_1).
- أما باقي قيم الجدول فيمكن تحديدها بنفس الطريقة السابقة كمايلي :

قيمة العنصر الجديد = قيمة العنصر القديم - $\frac{\text{قيمة عنصر عمود الارتكاز} \times \text{قيمة عنصر سطر المحور}}{\text{قيمة العنصر المحوري}}$

أو السطر الجديد = السطر القديم – معامل العنصر الداخل في هذا السطر$\times$ (معادلة المحور)

إذن يصبح الجدول الجديد على الشكل التالي :

VHB / VB	x_1	x_2	e_1	e_2	A	b_i	$\frac{b_i}{a_{i1}}$
e_1	1	0	1	0	0	400	$\frac{400}{1}$=400
x_2	0	1	0	1	0	300	/ تهمل
A	1	0	0	1-	1	300	$\frac{300}{1}$=300 ←
Z-cj	$-2-M$ ↑	0	0	5+ M	0	1500-300M	

نلاحظ من خلال الجدول أن هذا الحل أفضل من الحل السابق حيث إرتفعت قيمة دالة الهدف لكن ليس حلا أمثلا حيث يمكن تحسينه و ذلك لوجود قيم سالبة و بالتالي نواصل تحسين الحل بنفس الطريقة حتى يتحقق شرط الأمثلية :

و منه يصبح الجدول الجديد على الشكل التالي:

VHB / VB	x_1	x_2	e_2	e_3	b_i
e_1	0	0	1	1	100
x_2	0	1	0	1	300
x_1	1	0	0	-1	300
Z-cj	0	0	0	3	2100

نلاحظ من خلال الجدول أن هذا الحل أفضل من الحل السابق و لا يمكن تحسينه لأن قيم سطر Z-cj كلها موجبة أو معدومة و منه تحقق شرط الأمثلية و بالتالي هذا الجدول يمثل الحل الأمثل و الذي يتمثل في:

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_1=300 & e_1=100 \\ x_2=300 & e_2=0 \\ \multicolumn{2}{c}{Z=2100} \end{array}}$$