المحاضرة الثانية: طرق حل نماذج البرمجة الخطية – الطريقة البيانية

بعد أن تتم صياغة نماذج البرمجة الخطية سواء كانت مشكلة تعظيم أرباح أو تقليل تكاليف، سيتم التعرف على كيفية حل هذه النماذج وما هي قيم التغيرات التي تحدد أعلى ربح أو أقل تكلفة.

وتعتبر طريقة الرسم البياني وسيلة أولية لحل مشاكل البرمجة الخطية وتستخدم هذه الطريقة إذا كان النموذج يحتوي على متغيرين فقط، إذا يتعذر رسم النموذج في حالة إحتوائه على أكثر من متغيرين وتقوم هذه الطريقة على فكرة تمثيل القيود بمعادلة خط مستقيم ومن ثمة تحديد منطقة الحلول الممكنة ولحل نموذج البرمجة الخطية نتبع الأتي:

- ✍ نرسم محورين أحدهما أفقي وليكن X_1 والثاني عمودي وليكن X_2.
- ✍ نرسم القيود بعد تحويل المتباينات إلى معادلات وذلك بتحويل إشارات ≤ و≥ إلى إشارة مساواة =، إن عملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة يمكن تمثيلها بخط مستقيم ولمعرفة نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحورX_2 نعوض قيمة $X_1=0$ ولمعرفة نقطة تقاطع الخط المستقيم مع المحور X_1 نعوض قيمة $X_2=0$.
- ✍ نحدد منطقة حل كل قيد من القيود.
- ✍ تحديد منطقة الحل الممكن وهي منطقة تقاطع مناطق الحل والتي تقع ضمنها جميع النقاط التي تحقق جميع القيود في آن واحد.
- ✍ شرط عدم السلبية يحدد منطقة الحل لتكون في الربع الأول.
- ✍ نجد قيمة Z عند النقاط المتطرفة من منطقة الحلول العملية الممكنة، ويكون الحل أكبر قيمة إذا كانت دالة الهدف تعظيم وأصغر قيمة إذا كانت دالة الهدف تدنئة.

<u>المثال الأول:</u> أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي:

$\text{Max. } Z = 1000\,x_1 + 800\,x_2$

Subject to:

$8\,x_1 + 6\,x_2 \le 2400$

$4x_1 + 9x_2 \leq 1800$

$2x_1 \leq 500$

$x_1, x_2 \geq 0$

الحـــل:

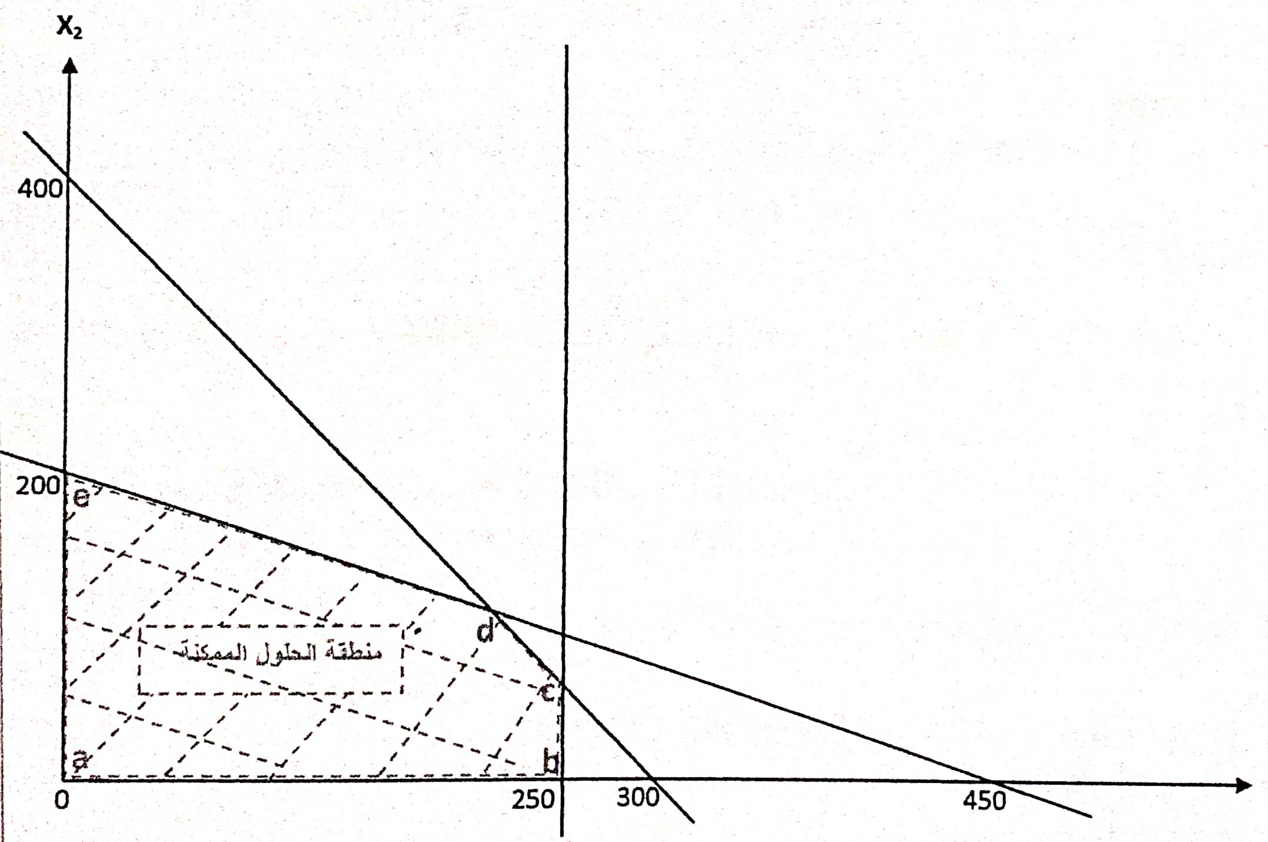
1- تحويل القيود إلى معادلات وإيجاد نقاط التقاطع مع المحاور:

$8x_1 + 6x_2 = 2400$ $(x_1=0, x_2=400)$ $(x_1=300, x_2=0)$

$4x_1 + 9x_2 = 1800$ $(x_1=0, x_2=200)$ $(x_1=450, x_2=0)$

$2x_1 = 500$ $(x_1 = 250)$

2- التمثيل البياني:



3- حساب قيمة دالة الهدف عند النقاط المتطرفة من منطقة الحلول الممكنة

أ- عند النقطة a : $a(0.0) \Rightarrow Z_a = 1000 \times 0 + 800 \times 0 = 0$

ب- عند النقطة b: $b(250.0)\Rightarrow Z_b = 1000 \times 250 + 800 \times 0 = 250000$

ج- عند النقطة c:

لإيجاد إحداثيات النقطة c نقوم بحل جملة معادلتي القيدين المتقاطعين عندها، أي الأول والثالث كما يلي:

$$\begin{cases} 8X1 + 6X2 = 2400 \ldots\ldots (1) \\ 2X1 = 500 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

من المعادلة (2) نجد:

$$X1 = \frac{500}{2} = 250$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد:

$$8 \times 250 + 6X2 = 2400 \Longrightarrow X2 = \frac{200}{3}$$

$$c(250.200/3)\Rightarrow Z_a = 1000 \times 250 + 800 \times \frac{200}{3} = \frac{410000}{3}$$

د- عند النقطة d:

لإيجاد إحداثيات النقطة d نقوم بحل جملة معادلتي القيدين المتقاطعين عندها، أي الأول والثاني كما يلي:

$$\begin{cases} 8X1 + 6X2 = 2400 \ldots\ldots (1) \\ 4X1 + 9X2 = 1800 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

بقسمة المعادلة (1) على -2 وجمعها مع المعادلة (2) نجد:

$$6X2 = 600 \Longrightarrow X2 = \frac{600}{6} = 100$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد:

$$X1 = \frac{2400 - 100 \times 6}{8} = 225$$

$d(225.100) \Rightarrow Z_d = 1000 \times 225 + 800 \times 100 = 305000$

د- عند النقطة e: $e(0.200) \Rightarrow Z_e = 1000 \times 0 + 800 \times 200 = 160000$

4 –الحل الأمثل:

225 وحدة من X1 و 100 وحدة من X2 لتحقيق أكبر ربح والمقدر بـ 305000 وحدة نقدية.

<u>المثال الثالث</u>: اوجد حل البرنامج الخطي التالي:

$\text{Min. } Z = 40\, x_1 + 35\, x_2$

S.T.

$2\, x_1 + 3\, x_2 \geq 600$

$x_1 + 2\, x_2 \leq 600$

$6\, x_1 + 3\, x_2 \geq 900$

$0.6\, x_1 + 0.25\, x_2 \geq 60$

$x_1 , x_2 \geq 0$

الحــــل:

1- تحويل القيود إلى معادلات وإيجاد نقاط التقاطع مع المحاور:

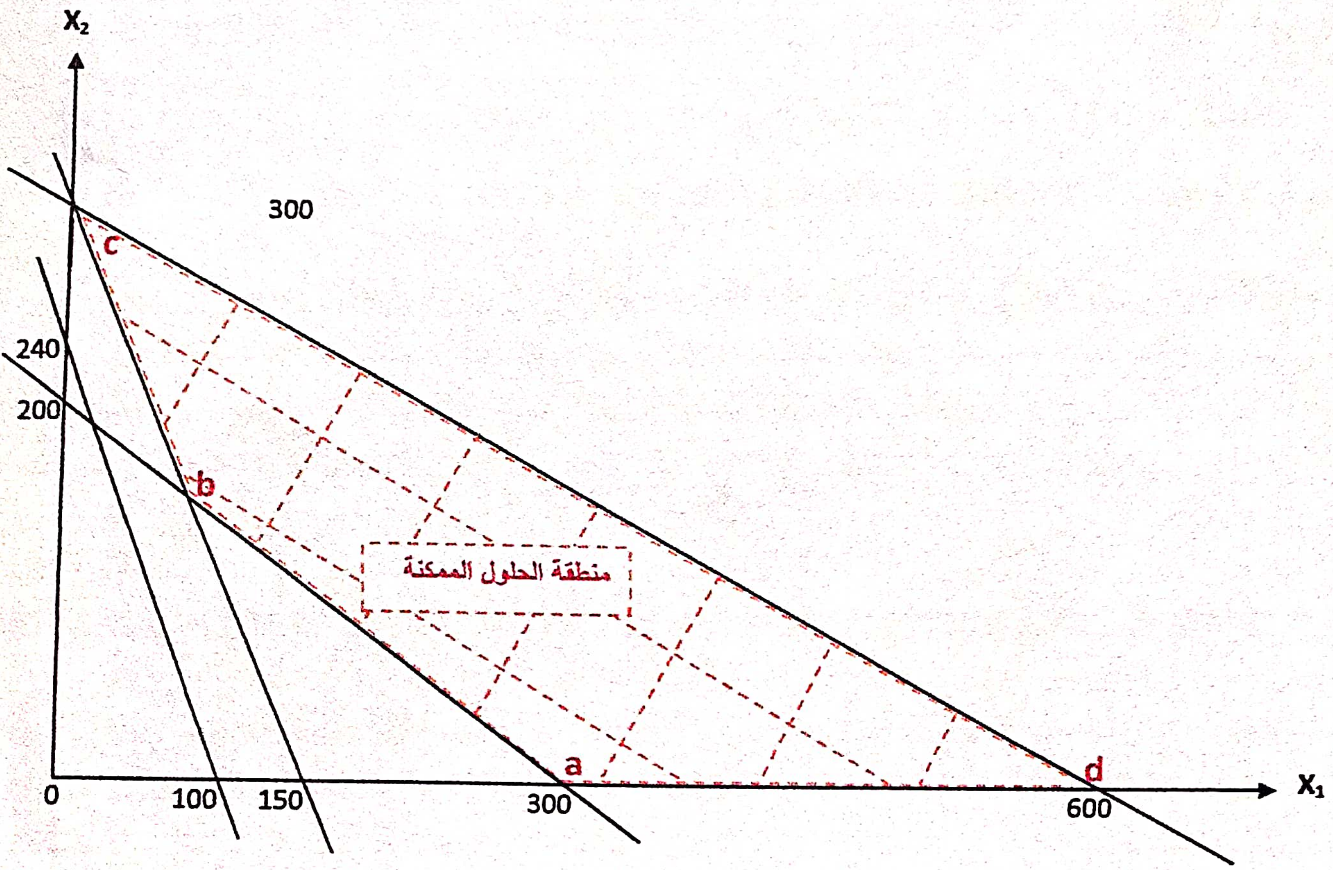
$2x_1 + 3x_2 = 600$ $(x_1=0 , x_2 =200)$ $(x_1=300 , x_2 =0)$

$x_1 + 2x_2 = 600$ $(x_1=0 , x_2 =300)$ $(x_1=600 , x_2 =0)$

$6x_1 + 3x_2 = 900$ $(x_1=0 , x_2 =300)$ $(x_1=150 , x_2 =0)$

$0.6\, x_1 + 0.25\, x_2=60$ **$(x_1=0 , x_2 =240)$ $(x_1=100 , x_2 =0)$**

2- التمثيل البياني:



3- حساب قيمة دالة الهدف عند النقاط المتطرفة من منطقة الحلول الممكنة

أ- عند النقطة a: $a(300.0) \Rightarrow Z_a = 40 \times 300 + 35 \times 0 = 12000$

ب- عند النقطة b:

لإيجاد إحداثيات النقطة b نقوم بحل جملة معادلتي القيدين المتقاطعين عندها، أي الأول والثالث كما يلي:

$$\begin{cases} 2X1 + 3X2 = 600 \ldots\ldots(1) \\ 6X1 + 3X2 = 900 \ldots\ldots(3) \end{cases}$$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نجد:

$$4X1 = 300 \Rightarrow X1 = \frac{300}{4} = 75$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد:

$$X2 = \frac{600 - 2 \times 75}{3} = 150$$

$$b\ (75.150) \Rightarrow Z_a = 40 \times 75 + 35 \times 150 = 8250$$

ج- عند النقطة c: $C\ (0.300) \Rightarrow Z_b = 40 \times 0 + 35 \times 300 = 10500$

د- النقطة d: $d(600.0) \Rightarrow Z_d = 40 \times 0 + 35 \times 600 = 24000$

4 – الحل الأمثل:

75 وحدة من X1 و150 وحدة من X2 لتحمّل أدنى تكلفة والمقدرة بـ 8250 وحدة نقدية

حالات خاصة في البرمجة الخطية

1)- *حالة عدم وجود الحل (تعذر الحل)*: وتحدث هذه الحالة إذا كان البرنامج يضم قيود متعارضة، حيث تكون منطقة الحل للقيود في الطريقة البيانية متعاكسة ولا تتقاطع في منطقة حل واحدة للقيود،

مثال: اوجد الحل الأمثل للنموذج التالي بالطريقة البيانية والطريقة المبسطة.

$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$

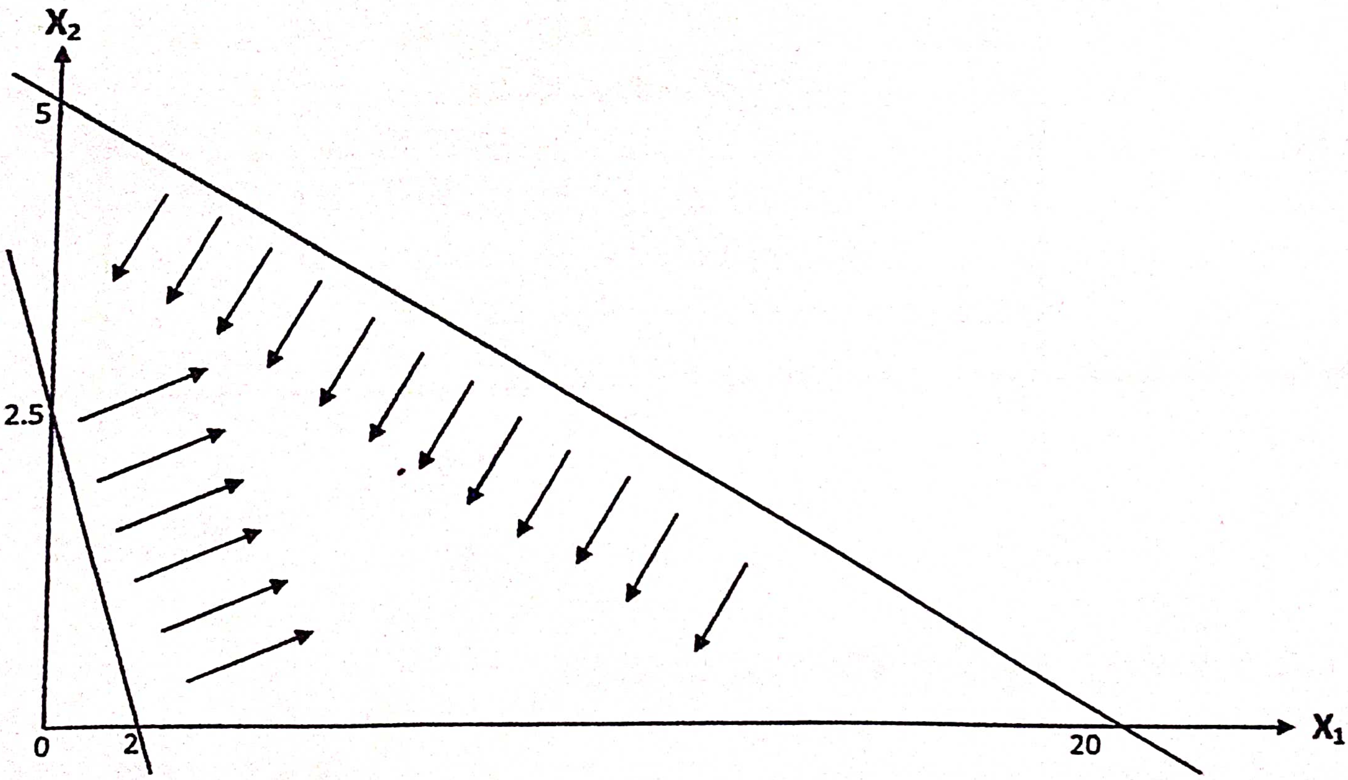
Subject to:

$5/2\,x_1 + 2x_2 \leq 5$

$x_1 + 4x_2 \geq 20$

$x_1, x_2 \geq 0$

- الحل بالطريقة البيانية:



نلاحظ إن منطقتا الحل للقيدين الأول والثاني متعاكستان ولا يتقاطعان نهائيا.

2)- <u>*حالة منطقة الحل غير المحدودة (عدم توفر الحل)*</u>: وفي هذه الحالة تكون منطقة الحل مفتوحة وبالتالي لا يكون لها حدود وتظهر هذه الحالة جلية في الحل البياني،

مثال: اوجد الحل الأمثل للنموذج التالي بالطريقة البيانية والطريقة المبسطة.

$\text{Max } Z = 10x_1 + 20x_2$

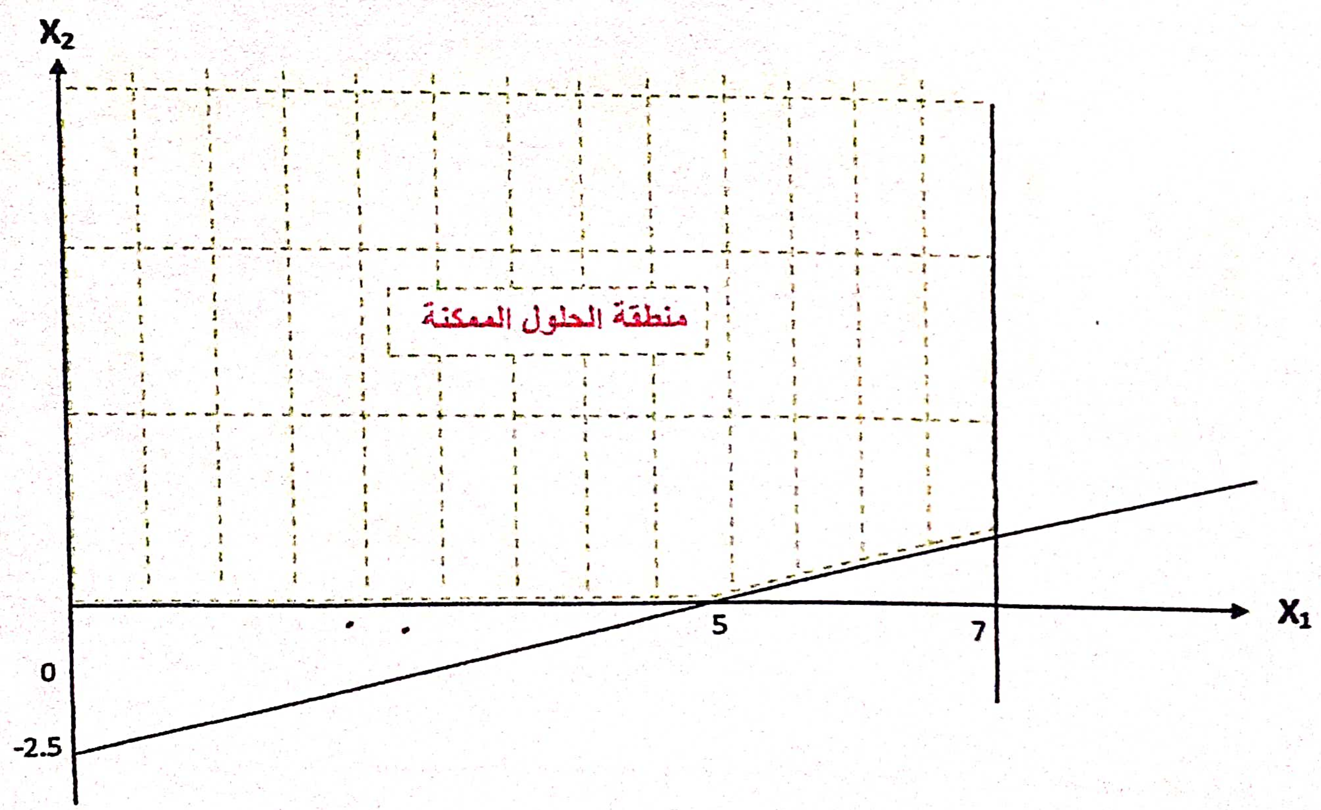
Subject to:

$x_1 - 2x_2 \le 5$

$x_1 \le 7$

$x_1, x_2 \ge 0$

- الحل بالطريقة البيانية:



نلاحظ أن منطقة الحل مفتوحة من الأعلى (ليس لها حدود).

3)- *حالة الحل البديل (توفر عدة حلول بديلة)*: وهي احتمالية وجود أكثر من قيمة للمتغيرات لحل واحد لدالة الهدف، ففي الحل البياني نجد أكثر من نقطة حل امثل قيمة أي أن قيمة (Z) متساوية عند أكثر من نقطة من منطقة الحل

مثال: اوجد الحل الأمثل للنموذج التالي بالطريقة البيانية والطريقة المبسطة.

Max $Z = 2x_1 + 4x_2$

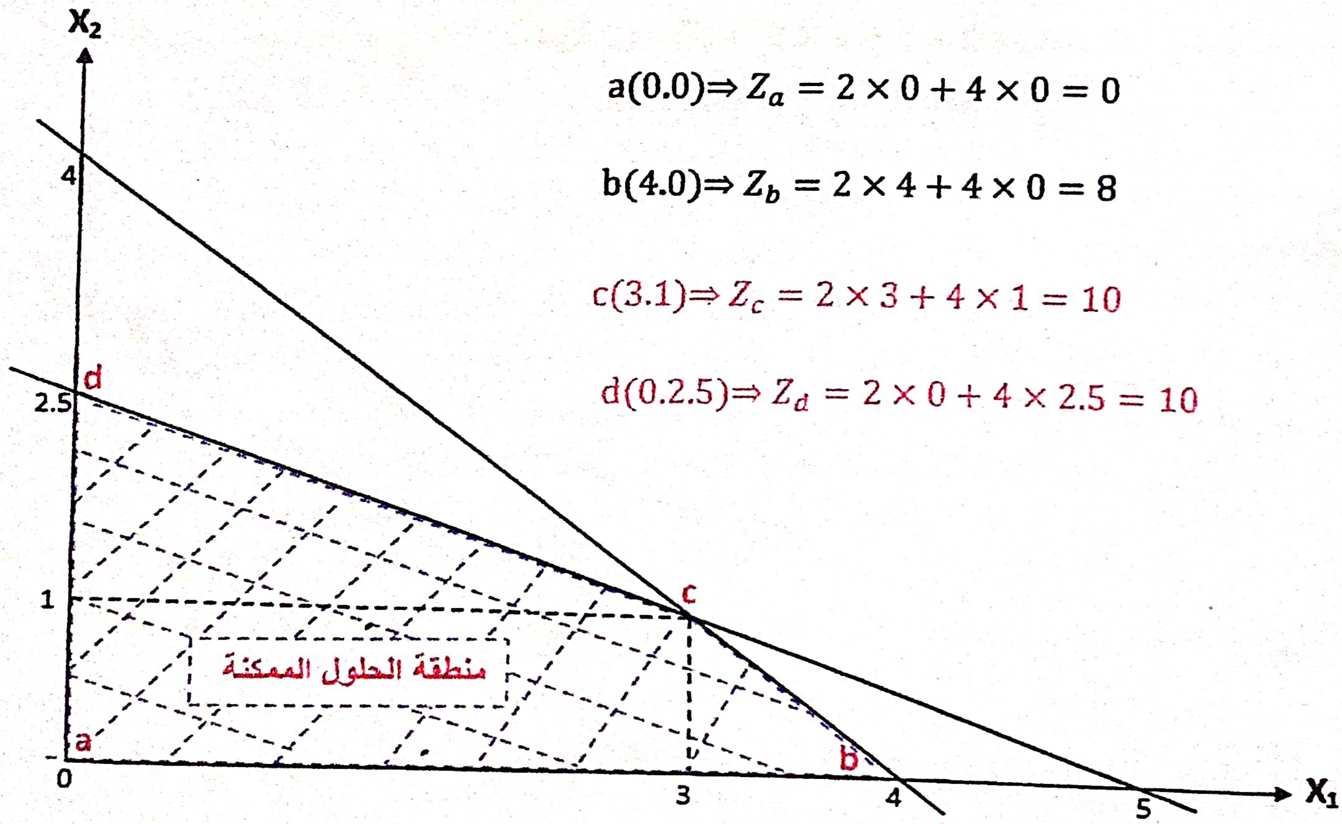
Subject to:

$x_1 + 2x_2 \leq 5$

$x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

- الحل بالطريقة البيانية:



$a(0.0) \Rightarrow Z_a = 2 \times 0 + 4 \times 0 = 0$

$b(4.0) \Rightarrow Z_b = 2 \times 4 + 4 \times 0 = 8$

$c(3.1) \Rightarrow Z_c = 2 \times 3 + 4 \times 1 = 10$

$d(0.2.5) \Rightarrow Z_d = 2 \times 0 + 4 \times 2.5 = 10$

نلاحظ أن قيمة (Z) عند النقطة $C(3,1)$ هي 10 وأيضا عند النقطة $D(0,2.5)$ هي 10، ولكن قيم هذه النقاط مختلفة.

4)- *حالة التكرار (الانحلال)*: تظهر هذه الحالة أن احد القيود إضافي وليس له أي تأثير على الحل.

مثال: اوجد الحل الأمثل للنموذج التالي بالطريقة البيانية والطريقة المبسطة.

Max $Z = 3x_1 + 7x_2$

Subject to:

$2X_1 + 8X_2 \leq 16$

$X_1 + 4X_2 \leq 8$

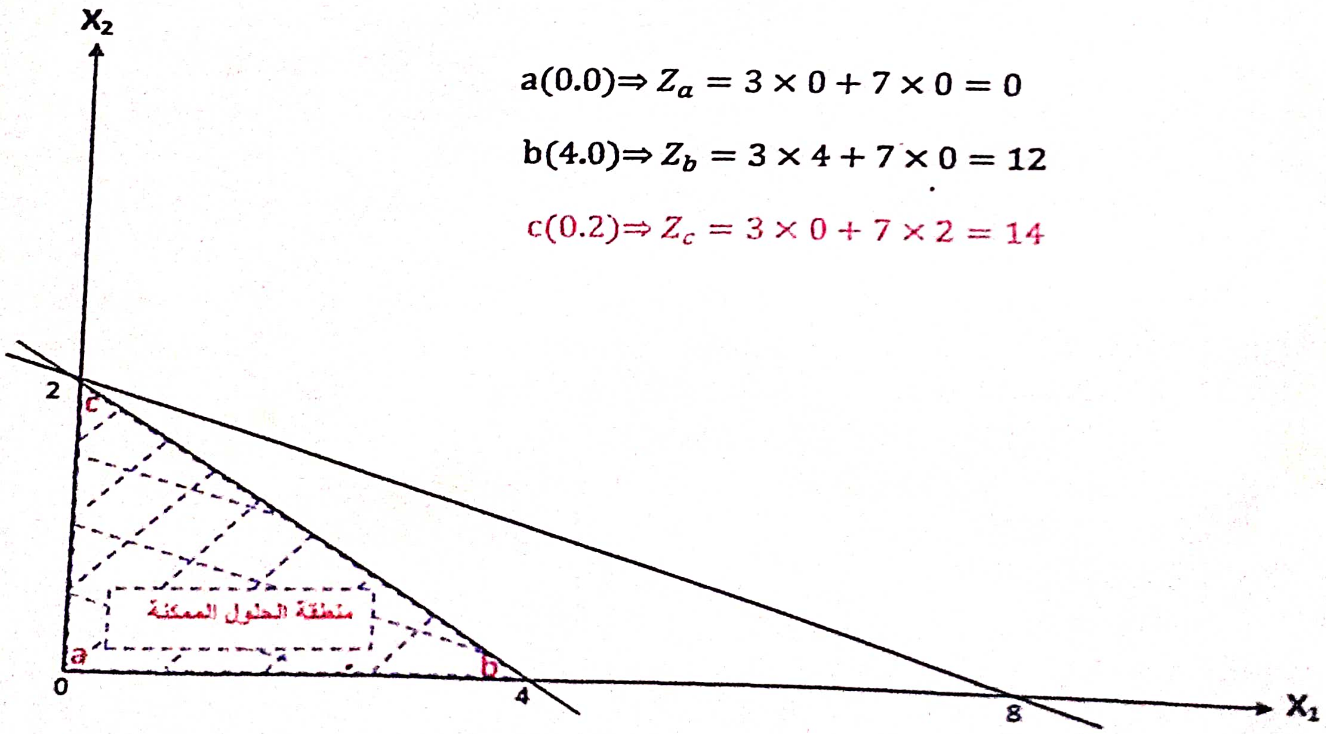
$X_1, X_2 \geq 0$

- الحل بالطريقة البيانية:

$a(0.0) \Rightarrow Z_a = 3 \times 0 + 7 \times 0 = 0$

$b(4.0) \Rightarrow Z_b = 3 \times 4 + 7 \times 0 = 12$

$c(0.2) \Rightarrow Z_c = 3 \times 0 + 7 \times 2 = 14$



نلاحظ أن القيد الأول ليس له أي تأثير على منطقة الحل.