أولا : مفهوم البرمجة الخطية و تطبيقاتها.

سنتطرق إلى التعريف بالبرمجة الخطية و إستخداماتها كأسلوب لحل الكثير من المسائل و كيفية بناء البرنامج الرياضي الخطي لهذه المسائل إنطلاقا من المعطيات الواقعية المسرودة.

1. **تعريف البرمجة الخطية:**

يتكون مفهوم البرمجة الخطية من كلمتين هما:

البرمجة: تعني البحث عن البرنامج الذي يحقق الهدف المطلوب أي التقنية الرياضية المستخدمة لإيجاد الحل الأمثل.

الخطية : تعني أن جميع العلاقات بين متغيرات النموذج الرياضي خطية ، أي تغير قيمة المخرجات تبعا لتغير قيمة المدخلات بنفس النسبة.

يمكن تعريف البرمجة الخطية على أنها الأسلوب الرياضي الذي يبحث عن التخصيص الأمثل لمجموعة من الموارد المحددة على مجموعة من الإستخدامات المتعددة و بذلك يحقق الكفاءة في إستخدام الموارد و الفعالية في تحقيق النتائج و الأهداف.

وتعرف أيضا على أنها الأسلوب أو التقنية الرياضية التي تسمح بتحديد حل أمثل من بين جملة من الحلول تكون عنده دالة الهدف في حدها الأدنى (تدنئة) أو في حدها الأقصى (تعظيم) حسب طبيعة دالة الهدف في ظل مجموعة من القيود.

2. **شروط و متطلبات إستخدام البرمجة الخطية:**

من أجل تطبيق هذا الأسلوب لا بد من توفر مجموعة من الشروط للمشكلة المدروسة:

- وضوح الهدف: يجب أن يكون للمشكلة المدروسة هدف واضح يُسعى إلى تحقيقه في شكل تخفيض أو تعظيم.
- محدودية الموارد الخاضعة للبرمجة و إمكانية صياغتها في مجموعة من القيود الموضوعية بشكل معادلات أو متراجحات يتم في ظلها تحقيق الهدف.
- توفر إستخدامات متعددة للموارد موضوع البرمجة.
- إمكانية التعبير عن المتغيرات موضوع البرمجة بصورة كمية (إمكانية القياس عدديا)
- أن تكون العلاقة بين المتغيرات موضوع البرمجة علاقة خطية.

3. **إستخدامات البرمجة الخطية:** تستخدم في مجالات عدة منها:

- **مشاكل الإنتاج:** تحديد تشكيلة مختلف المنتجات و كمياتها بما يسمح بتحقيق هدف معين في ظل كميات متاحة من عوامل الإنتاج.
- تحديد المزيج الإنتاجي المتمثل في العناصر التي تمزج مع بعض بكيفية معينة و نسب معينة للحصول على منتج جديد كصناعة الأدوية، الأغذية...

- التخزين بأقل تكلفة ممكنة في ظل قيود طاقة التخزين و الإحتياجات .
- التحليل المالي (إختيار السياسة الإستثمارية التي تحقق أقصى عائد)
- التسويق (تحديد المزيج الإعلاني).
- إختيار و تعيين الأفراد في المؤسسة (مسائل التعيين و التخصيص).
- توزيع الموارد و المنتجات من مصادر تواجدها نحو أماكن إستخدامها (مسائل النقل).

4. خطوات تكوين برنامج مسألة البرمجة الخطية:

تعتبر عملية تشكيل النموذج الرياضي الخطي أهم و أول خطوة للبحث عن الحل الأمثل للمسائل و هي تهدف إلى عرض المشكلة بطريقة رياضية، فإيجاد الحل الأمثل يتطلب وضع المسألة في شكل نموذج رياضي خطي .

لتشكيل النموذج الرياضي الخطي للمسألة نتبع الخطوات التالية :

❖ **تحديد المتغيرات** التي تمثل المجاهيل للمسألة المدروسة و المطلوب البحث عن قيمتها و التي على أساسها يتم تحويل المشكلة في شكل رياضي نرمز لها X_j.

X_j: رموز للكميات (عدد الوحدات) المنتجة لكل منتوج و هي المجاهيل التي نبحث عنها.

j: مؤشر لعدد متغيرات (مجاهيل) النموذج و المقدرة بـ (n).

❖ **تحديد طبيعة المشكلة (دالة الهدف):**تسمى أيضا الدالة الإقتصادية و هي تعبر عن الهدف الذي يسعى لتحقيقه متمثلا إما في تعظيم ($Max\ Z$) أو التخفيض و التدنئة ($Min\ Z$).

يعبر عنها رياضيا بدالة خطية يرمز لها Z وفق الصيغة التالية :

$$Opt\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j\ X_j$$

Opt: تعني الأمثلية (Optimalité)، أي إما تعظيم ($Max\ Z$) أو التخفيض و التدنئة($Min\ Z$).

C_j: معاملات دالة الهدف ، أي إما العائد الوحدوي أو التكلفة الوحدوية للمنتوج.

❖ **القيود**: هي عبارة عن الشروط المتاحة و تشير إلى العلاقة بين الكميات المتاحة من الموارد و متغيرات القرار في صورة قيود خطية توضح ما تحتاجه كل وحدة إنتاج من مورد من الموارد المتاحة و تكون عبارة عن جملة من المتراجحات أو المعادلات أو مزيج منهما ، تكتب رياضيا بالصيغة التالية:

$$\sum aij\ X_j\ (\leq \geq =)\ b_i$$

بحيث: aij: هي المعاملات الفنية أي الكميات المستهلكة من الموارد المتاحة لإنتاج وحدة واحدة.

b_i : هي الكميات المتاحة من الموارد .

i: عدد الأسطر و هي بعدد القيود (m).

j: عدد الأعمدة و هي بعدد المتغيرات أي المجاهيل (n).

❖ **شرط عدم السالبية**: يعني أن جميع قيم المتغيرات تكون موجبة أو معدومة و غير سالبة لأنها تتعلق بكميات مادية و تكتب رياضيا: $Xj \geq 0$.

أو بصيغة مفصلة :

$$Max\ Z\ \ ou\ bien\ \ Min\ Z = c_1x_1 + c_2\ x_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . c_n\ x_n$$

$$S/c \begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}x_2\ + a_{13}x_3\ + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots . a_{1n}x_n\ (\geq = \leq) b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}x_2\ + a_{23}x_3\ + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots . a_{2n}x_n\ (\geq = \leq) b_2 \\ a_{31}\ x_1 + a_{32}x_2\ + a_{33}x_3\ + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots . a_{3n}x_n\ (\geq = \leq) b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ x_1 + a_{m2}x_2\ + a_{m3}x_3\ + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots . a_{mn}x_n\ (\geq = \leq) b_m \\ \\ x_1\ \geq 0\ ,\ x_2\ \geq 0, x_3\ \geq 0\ , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x_n\ \geq 0 \end{cases}$$

لتقريب الفهم أكثر لكيفية بناء و صياغة نموذج البرمجة الخطية ندرج المثال التالي:

المثال التوضيحي الأول :حالة تعظيم

تقوم إحدى المؤسسات بتصنيع نوعين من لعب الأطفال نوع A و نوع B.

إنتاج الوحدة الواحدة من النوع A يتطلب وحدتين من مادة البلاستيك و يستغرق 3 ساعات في ورشة التصنيع، بينما يتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من النوع B وحدة واحدة من مادة البلاستيك و يستغرق 6 ساعات في ورشة التصنيع.

تتوفر المؤسسة على 1000 كغ من مادة البلاستيك ، كما أن طاقة ورشة التصنيع المتاحة هي 2400 ساعة عمل .

تتوقع المؤسسة أن تحقق ربح قدره 20 وحدة نقدية للوحدة من النوع A ، 30 وحدة نقدية للوحدة من النوع B.

المطلوب : صياغة هذه المشكلة في نموذج مسألة البرمجة الخطية

حل المسألة :

1. **التعريف بالمتغيرات :** لإمكانية صياغة المسألة في شكل نموذج رياضي لابد من التعريف بالمتغيرات و ذلك بإعطائها رموز معينة كما يلي :

نسمي x_1 : عدد الوحدات الممكن إنتاجها من لعب الأطفال نوع A.

نسمي x_2 : عدد الوحدات الممكن إنتاجها من لعب الأطفال نوع B.

2. **دالة الهدف** : تمثل هدف المؤسسة و هو تعظيم الأرباح المحققة من لعب الأطفال نوع A و B. و بالتالي فإذا كان الربح المحقق من الوحدة الواحدة من النوع A هو 20 وحدة نقدية، فإن الربح المحقق من كل الوحدات الممكن إنتاجها هو $20\ x_1$ ، و إذا كان الربح المحقق من الوحدة الواحدة من النوع B هو 30 وحدة نقدية، فإن الربح المحقق من كل الوحدات الممكن إنتاجها هو $30\ x_2$ ، و عليه تكون دالة الهدف بالشكل التالي :

$$Max\ Z = 20x_1 + 30\ x_2$$

3. **القيود :** هي المعادلات أو المتراجحات التي تعبر عن شروط المسألة و هي قيد مادة البلاستيك و قيد ساعات العمل .

فإذا كان إنتاج الوحدة الواحدة من النوع A يتطلب وحدتين من مادة البلاستيك فإن عدد الوحدات الإجمالي الممكن إنتاجه سيتطلب $2\ x_1$ من مادة البلاستيك، بينما يتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من النوع B وحدة واحدة من مادة البلاستيك إذا عدد الوحدات الإجمالي الممكن إنتاجه سيتطلب $1\ x_1$ و بالتالي فإن إنتاج النوعين يجب أن لا يتجاوز الكمية المتاحة من مادة البلاستيك 1000 كغ و بالتالي يكون القيد على النحو التالي : $2\ x_1 +$

قيد البلاستيك $x_2 \leq 1000$

نفس الشيء بالنسبة لقيد ساعات العمل، فإذا كان إنتاج الوحدة الواحدة من النوع A يستغرق 3 ساعات في ورشة التصنيع فإن عدد الوحدات الإجمالي الممكن إنتاجه سيستغرق $3\ x_1$ ساعة عمل ، بينما يستغرق النوع B 6 ساعات في ورشة التصنيع إذن عدد الوحدات الإجمالي الممكن إنتاجه سيستغرق $6\ x_1$ ساعة عمل و بالتالي فإن إنتاج النوعين يجب أن لا يتجاوز طاقة ورشة التصنيع 2400 ساعة عمل و بالتالي يكون القيد على النحو التالي :

قيد ساعات العمل $3\ x_1 + 6x_2 \leq 2400$

4. **شرط عدم السالبية** : يعني أن عدد الوحدات المنتجة من النوعين A و B يجب أن لا يكون سالبا بمعنى

(أنتج أو لا أنتج) لأن ذلك ليس له معنى إقتصادي. و بالتالي يكون القيد كالتالي :

شرط عدم السالبية $x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0$

و بجمع كل النقاط السابقة يكون النموذج الرياضي للمسألة كما يلي:

$$Max\ Z = 20x_1 + 30\,x_2$$

$$S/C\begin{cases} 2\,x_1 + x_2 \leq 1000 & \text{قيد البلاستيك} \\ 3\,x_1 + 6x_2 \leq 2400 & \text{قيد ساعات العمل} \\ x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0 & \text{شرط عدم السالبية} \end{cases}$$

المثال التوضيحي الثاني :حالة تدنئة

ترغب شركة بوضع برنامج خاص لإنتاج العلف الحيواني و قد تقرر إنتاج نوعين من العلف و كل نوع يتكون من مزيج من المواد الغذائية التي تطحن في مطاحن خاصة لتصبح جاهزة للإستعمال ، كلفة كل نوع من العلف و معلومات أخرى مبينة في الجدول أدناه:

الإحتياجات الأسبوعية/كغ	نوع العلف		نوع المادة في تركيبة العلف
	B	A	
1250	3	2	1
250	1	1	2
900	3	5	3
200	0,25	0,5	4
	35	40	تكلفة الوحدة الواحدة من العلف

المطلوب : أوجد البرنامج الأمثل لإنتاج العلف بأقل التكاليف و مع تحقيق الإحتياجات الأسبوعية .

الحل :

1. **التعريف بالمتغيرات : نسمي**

x_1: عدد الوحدات الواجب إنتاجها من العلف نوع A.

x_2: عدد الوحدات الواجب إنتاجها من. العلف نوع B.

2. **دالة الهدف: تدنئة تكاليف إنتاج العلف**

$$Min\ Z = 40x_1 + 35\,x_2$$

3. **القيود:**

$$S/C\begin{cases} 2\,x_1 + 3x_2 \geq 1250 \\ x_1 + x_2 \geq 250 \\ 5\,x_1 + 3x_2 \geq 900 \\ 0{,}5\,x_1 + 0{,}25x_2 \geq 200 \\ x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0 \quad \text{شرط عدم السالبية} \end{cases}$$