نظرية النهاية المركزية

1- مجموع ومتوسط n متغير عشوائي.

1*1 متوسط وتباين للمجموع:

ليكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n متغير ع، فإن متوسط وتباين مجموع n متغير عشوائي منفصل يكون له متغير ع. مستمر، حيث:

1- $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$; $\boxed{\cancel{n\mu}}$

2- $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} COV(X_i, X_j)$ (السحب دون إرجاع) TSR

إذا كان التباين المشترك معدوم في حالة n متغير ع. المدروس مستقل. ليصبح

3- $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$ / X_i م ع مستقلة. X_i (السحب بالإرجاع) TAV

4- $E(\bar{X}) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ et $Var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

في حالة X_i متغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة التوزيع حيث

$E(X_i) = \mu$

$Var(X_i) = \sigma^2$

$\sigma(x) = \sigma$

$$E\left(\sum X_i\right) = \sum E(X_i) = n\mu$$

$$Var\left(\sum X_i\right) = \sum Var(X_i) = \sum_{i}^{n} \sigma^2 = n\sigma^2$$

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} E\left(\sum X_i\right) = \frac{n\mu}{n} = \mu.$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

في حالة التباين المشترك غير معدوم (السحب بدون إرجاع) $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

2) مجموع ومتوسط n متغير ع مستقل ومتماثل التوزيع تابعة للتوزيع الطبيعي (تتبع القانون الطبيعي).

ليكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغير ع م م ت و $W_t = \sum_{i=1}^{n} X_i$ و $X_i \to N(\mu_i, \sigma_i)$

$$\sigma_i^2 \Rightarrow W_t \sim N\left(\mu_W = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \,,\ \sigma_W = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}\right)$$

* توليفة خطية لمتغير ع م م مستقل تابع للقانون الطبيعي:

ليكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n متغير ع م و ليكن

$$Y = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) + b \qquad a_i \neq 0$$

$$\text{Si } X_i \to N(\mu_i, \sigma_i) \Rightarrow Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$$

حيث:

$$\mu_Y = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i\right) + b \ ; \ \sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2}$$

مثال: ليكن X م ع يتبع توزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 100$ و $\sigma = 20$ ...

مثال:

$$X_i \to \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow \sum X_i \to Gamma(n, \lambda)$$

$$X_i \to Bernoulli(1, p) \Rightarrow \sum X_i \to Binomial(n, p)$$

نظرية النهاية المركزية: ليكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n متغير عشوائي مستقل ومتماثل التوزيع ذات متوسط μ وانحراف معياري σ، وليكن $W = X_1 + \ldots + X_n$ (مجموع متغيرات)

يوجد دائما عدد K كبير وكافي بحيث انطلاقا منه يصبح توزيع W يتقارب إلى التوزيع الطبيعي (K حجم العينة المدروسة) معالمه هي:

$$\sigma_W = \sqrt{n}\,\sigma \ , \ \mu_W = n\mu$$

- هذه النظرية تقارب توزيع X إلى التوزيع الطبيعي بغض النظر عن شكله وتوزيعه، إلا أنها تشترط حجم معين أدنى (K) (ينطلق من المجموع ومتوسط المجموع)

$$W \to N(n\mu, \sqrt{n}\,\sigma)$$

$$\overline{W} \to N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

المركز الجامعي حفيظ بوصوف ميلة
معهد العلوم الاقتصادية

أ. سعيداني

سلسلة ① : مجموع متغيرات عشوائية (ت . ط . م)

تمرين ①:

لمشروع ثلاثة مراحل متتابعة، لا تنطلق المرحلة 2 حتى تنتهي المرحلة 1 وكذلك المرحلة الأخيرة حيث أن مدة إنجاز كل مرحلة هي متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي، حيث أنها متغيرات مستقلة عن بعضها البعض، وكذلك تكلفة إنجاز كل مرحلة تتجزأ إلى تكلفة ثابتة (مستقلة عن الفترة) وتكلفة متغيرة مرتبطة بمدة الإنجاز لكل مرحلة. الجدول الموالي يلخص المعطيات:

المرحلة	1	2	3
متوسط انجاز المرحلة	60 يوم	70 يوم	50 يوم
الانحراف المعياري للمرحلة	12 يوم	10 أيام	08 أيام
التكلفة الثابتة	318000 دج	212000 دج	220.000 دج
التكلفة المتغيرة	15000 دج/اليوم	14000 دج/اليوم	16000 دج/اليوم

1- ما هو المتوسط والانحراف المعياري للمدة الكلية للمشروع؟

2- ما هو توزيع المدة الكلية للمشروع؟

3- ما هو احتمال أن تنتهي المشروع في أقل من 200 يوم؟

4- ما هو احتمال أن تتجاوز التكلفة الكلية للمشروع 3,5 مليون دج؟

5- منجز المشروع يجب أن يقدم ثمن المشروع، ما هي القيمة الدنيا التي يقترحها بعد التأكد من إنجاز 99%.

6- بالنسبة للثمن سؤال السابق، ما هو احتمال أن يكون هامش الربح أكبر من 10%.

تمرين ②:

رقم الأعمال اليومي (مجموع المبيعات) لتاجر هو متغير عشوائي ذو متوسط $\mu = 2510$ دج و انحراف معياري $\sigma = 425$ دج، نفرض أن رقم الأعمال اليومية مستقلة عن بعضها البعض.

1- ما هو رقم الأعمال السنوي المتوقع لتاجر في 310 يوم خلال سنة؟ وما هو انحرافه المعياري؟

2- ما هو احتمال أن يكون رقم أعمال التاجر السنوي أكبر من 780.000 دج؟

حل سلسلة 0

(1) نرمز للمدة ب T /

$T = D_1 + D_2 + D_3$ المدة الكلية للمشروع

نرمز للتكلفة ب C /

$C = 15D_1 + 14D_2 + 16D_3 + 750$ التكلفة الكلية ب 1000 دج

(1) $E(T) = E(D_1) + E(D_2) + E(D_3) = 180$ jours

$\sigma(T) = \sqrt{Var(D_1) + Var(D_2) + Var(D_3)} = \sqrt{308} = 17{,}55$ jours / $D_1 D_2 D_3 \perp$

(2) $T \rightsquigarrow N(180, 17{,}55)$

(3) $P(T < 200) = P\left(Z < \frac{200 - 180}{17{,}55}\right) = P(Z < 1{,}139) = 0{,}\cancel{3708} + 0{,}5 = 0{,}8708$

(4) $P(C > 3500)$; $E(C) = 15E(D_1) + 14E(D_2) + 16E(D_3) + 750 = 3430$.

$\sigma(C) = \sqrt{15^2 Var(D_1) + 14^2 Var(D_2) + 16^2 Var(D_3)} = \sqrt{68.384} = 261{,}503$

$P(C > 3500) = 1 - P\left(Z < \frac{3500 - 3430}{261{,}503}\right) = 1 - P(Z < 0{,}267) = 1 - 0{,}6026 = \boxed{0{,}3974}$

(5) $P(C < C_{mi}) = 0{,}99 \Rightarrow C_{mi} = 2{,}33$; $C_{mi} = 2{,}33 \times 261{,}5 + 3430 = 4039{,}295$

$C_{mi} = 4.039.295$ DA

(6) $P(4039{,}295 - C > 0{,}1\,C) = P\left(C < \frac{4039{,}295}{1{,}1}\right) = P(C < 3672{,}086)$

$P(Z < 0{,}925) = \boxed{0{,}8212}$

تمرين 2

(1) $S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{310}$

$E(S) = \mu_S = \sum E(Y_i) = 310 \cdot 2510 = 778100$ دج

$\sigma_S = \sqrt{\sum Var(Y_i)} = \sqrt{310 \cdot (425)^2} = 7.482{,}90$ دج

(2) $P(S > 780000) = 1 - P(S < 780000) = 1 - P(Z < 0{,}253) = 1 - 0{,}6 = \boxed{0{,}4}$