

4.1 INTRODUCTION

L'écoulement de puissance (E.P) ou écoulement de charge, est la solution pour les conditions de fonctionnement normal d'un réseau électrique triphasé équilibré en régime permanent. En d'autres termes, c'est la recherche d'un point de fonctionnement stable d'un réseau électrique à un moment donné à travers une information complète des tensions, courants et puissances mises en jeu dans le système de puissance. En général, les calculs d'écoulement de puissance sont exécutés dans le cadre de la planification d'un réseau électrique, de son fonctionnement et de son contrôle. Les résultats de ce calcul sont utilisés comme données de base dans les études de fonctionnement normal d'un réseau électrique, d'analyse de contingences (contingence signifie perte importante d'un ouvrage tel une ligne de transport ou générateur), d'évaluation de la stabilité, de répartition optimale de charge ou encore d'autres études de stabilité transitoire par exemple.

4.2 RESEAU ELECTRIQUE

4.2.1 Classification des nœuds d'un réseau électrique

En général, les nœuds d'un réseau électrique sont classés en trois catégories ou trois types, chaque classe avec ses paramètres spécifiés et ses paramètres inconnus, comme le montre le tableau suivant:

Type de Nœud	Paramètres spécifiés	Paramètres inconnus
Nœud balancier ou slack bus	$ V = 1.0 \text{ p.u}$ $\theta = 0^\circ$	P, Q
Nœud de génération ou nœud PV	$P, V $	Q, θ
Nœud de charge ou nœud PQ	P, Q	$ V , \theta$

Comme les pertes d'un système donné sont associées au profil de la tension du nœud correspondant, jusqu'à ce qu'une solution soit obtenue, l'exigence de la génération totale de puissance ne peut être déterminée. Aussi, le générateur du nœud balancier (slack bus) est utilisé afin de fournir les puissances active et réactive supplémentaires nécessaires pour compenser les pertes. Ainsi, au niveau du nœud balancier, les amplitudes et phases de tension sont fixées d'avance, et il restera à déterminer les puissances active et réactive. Ce n'est que lorsqu'on converge vers une solution, c'est à dire lorsque toutes les tensions aux nœuds sont connues, que les puissances active et réactive finales du slack bus sont déterminées. En d'autres termes, avant convergence, les pertes ne sont pas connues d'avance et donc les P et Q du slack bus ne peuvent être déterminés.

Afin de définir le problème d'écoulement de puissance à résoudre, il est nécessaire de spécifier la puissance active et l'amplitude de tension de chaque nœud connecté à un générateur, ces quantités étant respectivement contrôlées par le régulateur de vitesse et le système d'excitation. Les nœuds de génération sont généralement appelés nœuds PV. Comme les générateurs synchrones surexcités fournissent du courant avec un facteur de puissance en retard, la puissance réactive Q ne nécessite pas d'être spécifiée. Les nœuds de charge sont généralement appelés nœuds PQ. Ceci est dû au fait que les puissances active et réactive de charge sont spécifiées d'avance. Quant au nœud balancier ou slack bus, l'amplitude de tension est généralement fixée à 1 p.u (mais peut avoir une autre spécification), alors que la phase est généralement fixée à 0 degré, pour des raisons de référence pour les valeurs de tension des nœuds du réseau électrique. D'ailleurs, le slack bus est parfois considéré comme étant aussi le nœud de référence.

En plus de ces trois types de nœuds, un autre type de nœuds, appelés nœuds contrôlés, peut être additionné, lorsque certains nœuds de charge comportent des transformateurs avec prises de réglage (tap changers) pour varier par degrés l'amplitude de tension et/ou avec déphaseurs (phase-shifters) pour varier la phase de tension entre l'entrée et la sortie des transformateurs. Pour ces nœuds, les paramètres connus sont l'amplitude de tension ($|V|$) en plus des puissances active et réactive (P, Q), alors que les paramètres inconnus sont la phase de tension (θ) et les rapports de transformation (t).

4.2.2 Relations entre les nœuds du réseau

Le problème d'écoulement de puissance peut être défini comme étant le calcul des puissances active et réactive de transit dans chaque ligne du réseau électrique ainsi que l'amplitude et la phase de tension de chaque nœud pour des conditions de génération et de charge spécifiées. L'information obtenue à partir d'une étude d'écoulement de puissance peut être utilisée pour tester la capacité du système pour le transfert de l'énergie des sources de générations vers les charges sans surcharger les lignes de transport et en déterminant l'adéquation de la régulation de tension par les capacités ou réacteurs shunts, les transformateurs à prise réglable, les machines rotatives à travers leur capacité à fournir de la puissance réactive selon le besoin.

Il est possible de définir, respectivement au type de nœud, le type de puissance: puissance de génération pour les nœuds de génération, puissance de charge pour les nœuds de charge et puissance d'injection à un nœud donné. Par exemple, la puissance nette au niveau du nœud i d'un réseau électrique comportant n nœuds s'exprime par:

$$S_i = P_i + j Q_i = (P_{Gi} - P_{Li} - P_{Ti}) + j (Q_{Gi} - Q_{Li} - Q_{Ti}) \quad (4.1)$$

avec

- S_i puissance complexe triphasée au nœud i ,
- P_i, Q_i puissances active et réactive triphasée au nœud i ,
- P_{Gi}, Q_{Gi} puissances active et réactive de génération triphasées injectées au nœud i ,
- P_{Li}, Q_{Li} puissances active et réactive de charge triphasées sortant du nœud i ,
- P_{Ti}, Q_{Ti} puissances triphasées active et réactive transmises (vers les autres nœuds) sortant du nœud i .

Dans les études d'écoulement de puissance, l'hypothèse de base est que le système d'énergie considéré est un système triphasé équilibré fonctionnant en régime permanent avec une fréquence constante. Aussi, le système peut être représenté par le réseau de sa seule séquence positive d'une seule phase à travers une modélisation en π des lignes de transport. Le calcul d'écoulement de puissance peut se faire soit en utilisant la matrice admittance Y_{BUS} soit la matrice impédance Z_{BUS} du réseau électrique. Il est usuel d'utiliser l'approche basée sur l'analyse nodale. Aussi, si les tensions des nœuds sont connues, les courants d'injection peuvent être calculés par:

$$I_{BUS} = Y_{BUS} V_{BUS} \quad (4.2)$$

Par contre, si les courants d'injection sont connus, la forme inverse de (4.2) permet de déterminer les tensions aux nœuds:

$$V_{BUS} = Y_{BUS}^{-1} I_{BUS} = Z_{BUS} I_{BUS} \quad (4.3)$$

Cependant, dans un problème d'écoulement de puissance, les puissances actives et réactives nodales sont les variables indépendantes alors que les tensions des nœuds sont des variables dépendantes. La détermination des tensions nodales, qui initialement semblait être une opération simple devient un problème non linéaire, ce qui nécessite une méthode de calcul itérative puisque ce sont les puissances nodales qui sont connues et non le vecteur courant.

Chaque nœud du réseau est défini pour quatre paramètres principaux: les puissances active P et réactive Q , l'amplitude de tension $|V|$ et sa phase θ (parfois notée δ). Seuls deux de ces quatre variables sont indépendantes et sont donc spécifiées, les deux autres devant être déterminées. A cause des caractéristiques physiques des générateurs et des charges, les conditions électriques de chaque nœud sont définies en termes de puissance active et réactive au lieu du courant nodal.

Comme la puissance complexe injectée au nœud i peut s'exprimer:

$$V_i I_i^* = P_i + j Q_i \quad (4.4)$$

Le courant de nœud est lié à ces variables par:

$$I_i = \frac{P_i - j Q_i}{V_i^*} \quad (4.5)$$

Convention des signes des puissances active et réactive

Durant l'étude d'un calcul d'écoulement de puissance, il faut se rappeler que la puissance réactive en retard est positive pour un courant inductif, celle en avance étant négative pour un courant capacitif et que le courant de nœud positif est dans la direction d'entrée du nœud. Comme le courant de génération a la direction d'entrée au nœud, il est considéré positif alors que le courant de charge qui sort du nœud est considéré négatif.

Aussi, on peut faire les observations suivantes:

- 1./ Les puissances active et réactive associées à un nœud de charge inductive (nœud de charge avec facteur de puissance en retard) sont tous deux négatives.
- 2./ Les puissances active et réactive associées à un nœud de charge capacitive (nœud de charge avec facteur de puissance en avance) sont respectivement négative et positive.
- 3./ Les puissances active et réactive associées à un nœud de génération inductive (nœud de génération fonctionnant en mode de facteur de puissance en retard) sont tous deux positives.
- 4./ Les puissances active et réactive associées à un nœud de génération capacitive (nœud de génération fonctionnant en mode de facteur de puissance en avance) sont respectivement positive et négative.
- 5./ La puissance réactive d'un nœud où est localisé un dispositif de compensation capacitive shunt est positive.

Par exemple, si un nœud est connecté à une charge qui demande $P=5$ p.u (watts) et $Q=3$ p.u (vars inductifs), le courant de nœud de l'équation (4.5) s'écrit:

$$I_i = \frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} = \frac{-5 - j(-3)}{V_i^*} = \frac{-5 + j3}{V_i^*} \text{ p.u A}$$

Cependant, si un nœud est connecté à un générateur qui opère en mode de facteur de puissance en retard et fournit 5 p.u watts et 3 p.u vars, alors le courant de nœud s'écrit:

$$I_i = \frac{5 - j(+3)}{V_i^*} = \frac{5 - j3}{V_i^*} \text{ p.u A}$$

4.3 TECHNIQUES DE CALCUL DU PROBLEME D'ECOULEMENT DE PUISSANCE

4.3.1 Méthode itérative de Gauss (Jacobi)

Supposons qu'un ensemble d'équations linéaires simultanées à n inconnues (x_1, x_2, \dots, x_n variables indépendantes) est donné par:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned} \tag{4.6}$$

où les coefficients a_{ij} et les variables dépendantes b_i sont connus. Les équations de (4.6) peuvent se réécrire:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= (1/a_{11})[b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n] \\
 x_2 &= (1/a_{22})[b_2 - a_{21}x_1 - \dots - a_{2n}x_n] \\
 &\vdots \\
 x_n &= (1/a_{nn})[b_n - a_{n1}x_1 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}]
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Supposons que les valeurs approximatives initiales des variables indépendantes sont respectivement:

$$x_i^{(0)} = b_i / a_{ii} \quad i = 1, n \tag{4.8}$$

Alors, après substitutions, le système (4.7) se réécrit:

$$\begin{aligned}
 x_1^{(1)} &= (1/a_{11})[b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - \dots - a_{1n}x_n^{(0)}] \\
 x_2^{(1)} &= (1/a_{22})[b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - \dots - a_{2n}x_n^{(0)}] \\
 &\vdots \\
 x_n^{(1)} &= (1/a_{nn})[b_n - a_{n1}x_1^{(0)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(0)}]
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Cette méthode itérative de Jacobi détermine les nouvelles valeurs des n variables indépendantes sur la base des valeurs précédentes simultanées. La procédure de calcul est répétée jusqu'à convergence. A l'ordre $k+1$, le système (4.9) devient:

$$\begin{aligned}
 x_1^{(k+1)} &= (1/a_{11})[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}] \\
 x_2^{(k+1)} &= (1/a_{22})[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}] \\
 &\vdots \\
 x_n^{(k+1)} &= (1/a_{nn})[b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}]
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

La convergence est atteinte lorsque le critère d'arrêt est satisfait. Plusieurs critères d'arrêt peuvent être proposés. Un critère très utilisé, se base sur la comparaison entre la différence absolue des variables indépendantes de deux ordres successifs et un seuil de tolérance ε initialement fixé:

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Un autre critère peut être simplement un nombre fixé d'itérations.

4.3.2 Méthode itérative de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel, est basée sur la méthode de Gauss. La différence est de rendre plus efficace la procédure de calcul en faisant une petite modification qui consiste à utiliser au niveau de chaque itération les toutes dernières valeurs des variables indépendantes calculées.

Cela se traduit pour l'itération $(k+1)$ par le système suivant:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= (1/a_{11})[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}] \\
x_2^{(k+1)} &= (1/a_{22})[b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}] \\
&\cdot \\
x_n^{(k+1)} &= (1/a_{nn})[b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}]
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Les mêmes critères d'arrêt que ceux de la méthode de Gauss s'appliquent.

4.3.3 Application de la méthode de Gauss-Seidel

Supposons que le neutre d'un réseau électrique à n nœuds est pris comme référence. Les n équations de courant s'expriment alors en fonction des n tensions inconnues:

$$I_{BUS} = Y_{BUS} V_{BUS} \tag{4.12}$$

ou sous forme développée:

$$\begin{aligned}
I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + \dots + Y_{1n}V_n \\
I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + \dots + Y_{2n}V_n \\
&\cdot \\
I_n &= Y_{n1}V_1 + Y_{n2}V_2 + \dots + Y_{nn}V_n
\end{aligned} \tag{4.13}$$

ou encore sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ V_n \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

Les éléments de la matrice admittance sont déterminés comme démontré précédemment (Chapitre II), sur la base d'une modélisation en π des lignes de transport à laquelle il faut ajouter les éléments shunts connectés à certains nœuds et la modélisation en π des transformateurs à prise réglable ou déphaseurs (annexes A et B).

L'application des équations (4.11) à l'itération $k+1$ donne:

$$\begin{aligned}
V_1^{(k+1)} &= \frac{1}{Y_{11}}(I_1^{(k)} - Y_{12}V_2^{(k)} - Y_{13}V_3^{(k)} - \dots - Y_{1n}V_n^{(k)}) \\
V_2^{(k+1)} &= \frac{1}{Y_{22}}(I_2^{(k)} - Y_{21}V_1^{(k+1)} - Y_{23}V_3^{(k)} - \dots - Y_{2n}V_n^{(k)}) \\
&\cdot \\
V_n^{(k+1)} &= \frac{1}{Y_{nn}}(I_n^{(k)} - Y_{n1}V_1^{(k+1)} - Y_{n2}V_2^{(k+1)} - \dots - Y_{n,n-1}V_{n-1}^{(k+1)})
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Même si les courants des équations (4.15) sont inconnus, ils peuvent être exprimés en termes de P , Q et V :

$$I_i = \frac{P_i - j Q_i}{V_i^*} \quad (4.16)$$

Puisque les nœuds sont classés, chaque type de nœuds comporte deux paramètres connus et deux inconnus qu'il faut déterminer.

Nœuds PQ

Une formule générale pour déterminer la tension complexe (l'amplitude $|V_i|$ et la phase θ_i) du nœud i peut être développé en substituant l'équation (4.16) dans (4.15):

$$V_i^{(k+1)} = \frac{1}{Y_{ii}} \left(\frac{P_i - j Q_i}{V_i^{(k)*}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Y_{ij} V_j^{(k)} \right) \quad i = 2, \dots, n \quad (4.17)$$

Il faut noter que le nœud 1 est choisi comme nœud balancier dont l'amplitude et la phase de tension sont connues. Cela explique pourquoi on commence les calculs pour $i = 2$.

Nœuds PV

Si le nœud i est un nœud de génération, la puissance réelle P_i et l'amplitude de tension $|V_i|$ sont connus, et il reste à déterminer la puissance réactive et la phase de tension au début de chaque itération.

Aussi, pour le générateur du nœud i , on a:

$$I_{gi} = \frac{P_i - j Q_i}{V_i^*} = Y_{i1} V_1 + Y_{i2} V_2 + \dots + Y_{in} V_n \quad (4.18)$$

D'où, on tire:

$$P_i - j Q_i = V_i^{(k)*} \left[\sum_{j=1}^n Y_{ij} V_j^{(k)} \right] \quad (4.19)$$

En prenant la partie imaginaire de l'équation (4.19), on obtient la puissance réactive du nœud de génération i :

$$Q_i = -Im \left[V_i^{(k)*} \left(\sum_{j=1}^n Y_{ij} V_j^{(k)} \right) \right] \quad (4.20)$$

Il faut remarquer que les meilleures valeurs de tension sont utilisées dans le calcul de la puissance réactive Q_i . Une fois Q_i déterminée, on utilise l'équation (4.17) pour calculer la nouvelle valeur de V_i du nœud de génération i et en tirer la phase θ_i . Habituellement, une limite maximum et/ou minimum de Q doit être spécifiée. Si Q_{ical} excède la limite spécifiée Q_{ispec} , cette dernière est alors choisie à la place de la valeur calculée pour être utilisée dans (4.17). Si l'amplitude de tension $|V_i|$ de la nouvelle valeur calculée de V_i est plus grande que la valeur spécifiée d'amplitude de tension du nœud de génération i , la nouvelle tension est corrigée en la

multipliant par le facteur correspondant au rapport de l'amplitude de tension spécifiée par l'amplitude de tension calculée, tout en gardant la phase de tension de la valeur calculée. En d'autres termes, seule l'amplitude doit être corrigée.

En résumé, le processus itératif de Gauss-Seidel commence en prenant des valeurs initiales pour les amplitudes et phases de tension inconnues (sauf pour le cas du nœud balancier) et calcule les nouvelles valeurs, qui sont ainsi des valeurs corrigées. Au niveau de chaque nœud, et à chaque itération, la tension corrigée est remplacée dans l'équation (4.17) comme une valeur estimée afin de calculer une nouvelle valeur. Ce processus est répété jusqu'à convergence.

Nœud balancier (slack)

Une fois que toutes les tensions aux nœuds V_2, V_3, \dots, V_n sont solutionnées, la puissance du nœud balancier est alors calculée:

$$\frac{P_1 - j Q_1}{V_1^*} = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 + Y_{13} V_3 + \dots + Y_{1n} V_n \tag{4.21}$$

ou

$$P_1 - j Q_1 = Y_{11} V_1 V_1^* + Y_{12} V_2 V_1^* + Y_{13} V_3 V_1^* + \dots + Y_{1n} V_n V_1^* \tag{4.22}$$

4.3.4 Puissances de transit

Lorsque toutes les tensions des nœuds du réseau sont connues, les puissances de transit dans les lignes de transmission peuvent être déterminées afin de compléter l'étude d'écoulement de puissance. A titre d'exemple, considérons la ligne reliant les nœuds i et j , comme le montre la figure 4.1:

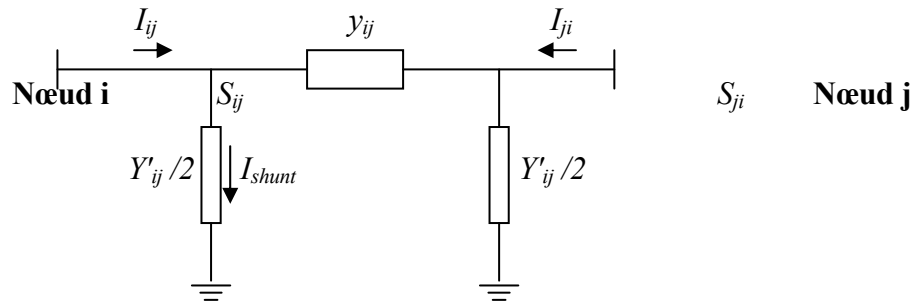


Fig. 4.1

Supposons que le courant de ligne I_{ij} peut s'exprimer par:

$$I_{ij} = I_{series} + I_{shunt} = (V_i - V_j) y_{ij} + V_i \frac{y'_{ij}}{2} \tag{4.23}$$

où y_{ij} admittance de la ligne ij ,
 y'_{ij} admittance shunt total de la ligne ij .

La puissance complexe de transit le long de la ligne ij s'écrit:

$$S_{ij} = P_{ij} + j Q_{ij} = V_i I_{ij}^* \tag{4.24}$$

En substituant l'expression de (4.23) dans (4.24), on obtient:

$$S_{ij} = P_{ij} + j Q_{ij} = V_i (V_i^* - V_j^*) y_{ij}^* + V_i V_i^* \left(\frac{y'_{ij}}{2} \right)^* \quad (4.25)$$

De manière similaire, les puissances active et réactive de transit du nœud i au nœud j s'exprime donc:

$$S_{ji} = P_{ji} + j Q_{ji} = V_j (V_j^* - V_i^*) y_{ji}^* + V_j V_j^* \left(\frac{y'_{ij}}{2} \right)^* \quad (4.26)$$

4.3.5 Application du facteur d'accélération

La méthode de Gauss-Seidel nécessite souvent un grand nombre d'itérations pour converger. Aussi, ce nombre pourrait être réduit de manière significative si on introduit dans la procédure de calcul un facteur dit d'accélération. La méthode qui en découle est appelée **méthode de relaxation**. La correction de la tension du nœud i de l'ordre k , $V_i^{(k)}$, vers l'ordre $k+1$, $V_i^{(k+1)}$, est multipliée par ce facteur afin de ramener toute nouvelle valeur de tension proche de sa valeur finale. Aussi, la nouvelle valeur accélérée de la tension peut s'exprimer par:

$$V_{i\text{acc}}^{(k+1)} = V_i^{(k)} + \alpha (V_i^{(k+1)} - V_i^{(k)}) = V_i^{(k)} + \alpha \Delta V_i^{(k)} \quad (4.27)$$

Il est nécessaire de préciser cependant, que dans le choix du facteur d'accélération, même si de manière générale, son utilisation améliore considérablement le calcul, une convergence rapide n'est pas garantie de manière absolue. Plusieurs études ont essayé de trouver la valeur optimale de ce facteur qui oscille entre 1.5 et 2.0, dépendamment de la topologie du réseau étudié. En pratique, la valeur $\alpha = 1.6$ est la plus souvent indiquée.

4.3.6 Méthode de Gauss-Seidel avec la matrice Z_{BUS}

La méthode de Gauss-Seidel peut aussi utiliser la matrice impédance Z_{BUS} au lieu de la matrice admittance Y_{BUS} pour le calcul d'écoulement de puissance d'un réseau électrique. La matrice Z_{BUS} , bien qu'elle peut être calculée en inversant directement Y_{BUS} , est généralement construite en commençant par le slack bus avec comme résultat le nœud terre et les connexions shunts (capacités statiques, charges, etc.) entre les autres nœuds et la terre ne sont pas inclus à travers les éléments de Z_{BUS} . Aussi ces connexions shunts et la terre sont considérés comme des sources de courant. Ceci étant, le processus démarre en sélectionnant l'ensemble de nœuds de tension (slack bus et nœuds PV), les courants de nœuds peuvent être calculés par:

$$I_p = \frac{P_p - j Q_p}{V_p^*} - y_p V_p \quad p = 1, \dots, n \quad p \neq s \quad (4.28)$$

où les connexions shunts sont traitées comme des sources de courants.

Une nouvelle estimée des tensions peut être obtenue, à partir de la matrice impédance du réseau:

$$V_{BUS} = Z_{BUS} I_{BUS} + V_R \quad (4.29)$$

avec V_R le vecteur dont les éléments sont tous égaux à la tension du slack bus et la matrice impédance formée en utilisant le slack bus comme référence est de dimension $(n-1) \times (n-1)$.

Ces nouvelles estimées de tension sont utilisées dans (4.28) pour recalculer les courants aux nœuds. Le processus est ainsi répété jusqu'à ce que les variations de toutes les tensions aux nœuds soient inférieures à la tolérance fixée.

L'application de la méthode de Gauss-Seidel est telle que pour chaque nœud p , on a:

$$V_p^{k+1} = V_s + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq s}}^{p-1} Z_{pq} I_q^{k+1} + \sum_{\substack{q=p \\ q \neq s}}^n Z_{pq} I_q^k \quad p = 1, n \quad (4.30)$$

avec V_s tension du nœud slack.

La méthode a des caractéristiques fiables de convergence, mais n'a pas l'avantage des méthodes impliquant la matrice admittance en termes de stockage et de rapidité.

4.4 CALCUL D'E.P PAR LA METHODE DE NEWTON-RAPHSON

4.4.1 Méthode de Newton-Raphson

Supposons qu'une équation à une seule variable est donnée par:

$$f(x) = 0 \quad (4.31)$$

Comme toute fonction peut s'exprimer comme une série de puissances, la fonction donnée peut être développée en série de Taylor autour d'un point x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \frac{df(x_0)}{dx} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{df^2(x_0)}{dx^2} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{df^n(x_0)}{dx^n} (x - x_0)^n \quad (4.32)$$

Si les termes parés la dérivée première sont négligés (en supposant que la convergence est assurée par les deux premiers termes), une première approximation est donnée par:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} (x - x_0) = 0 \quad (4.33)$$

d'où on tire:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{df(x_0)/dx} \quad (4.34)$$

Cependant, afin de prévenir toute confusion dans les notations, il est préférable de réécrire (4.34) sous la forme:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{df(x^{(0)})/dx} \quad (4.35)$$

avec $x^{(0)}$ l'approximation initiale (estimée)
 $x^{(1)}$ la première approximation.

Aussi, une formule récursive peut être développée, ce qui donne à l'itération $k+1$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{df(x^{(k)})/dx} \quad (4.36)$$

ou alternativement:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \quad (4.37)$$

Alors

$$\Delta x = -\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \quad (4.38)$$

où

$$\Delta x = x^{(k+1)} - x^{(k)} \quad (4.39)$$

Cette même méthode peut être facilement étendue aux équations multivariées non linéaires.

Soit le système de n équations à n inconnues:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

ou sous forme matricielle:

$$F(x) = 0 \quad (4.41)$$

avec

$$x^t = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

Comme pour le cas monovarié, si les fonctions du système d'équations (4.40) peuvent être développées en séries de Taylor, et que les termes parés les premières dérivées sont négligés, on peut écrire:

$$F(x) = F(x^{(0)}) + [J(x^{(0)})][x - x^{(0)}] \quad (4.42)$$

où la matrice jacobienne des coefficients du système (4.42) s'écrit:

$$[J(x)] = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \cdots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 & \cdots & \partial f_2 / \partial x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \partial f_n / \partial x_2 & \cdots & \partial f_n / \partial x_n \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Aussi, à partir de (4.42), on a:

$$[x^{(k+1)}] = [x^{(k)}] - [J(x^{(k)})]^{-1} [F(x^{(k)})] \quad (4.44)$$

ou

$$[x^{(k+1)}] = [x^{(k)}] - [J(x^{(k)})]^{-1} [F(x^{(k)})] \quad (4.45)$$

4.4.2 Application de la méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson est très fiable et extrêmement rapide pour la convergence (principalement en utilisant la programmation impliquant les techniques de sparsité).

Cette méthode n'est pas sensible aux causes de la mauvaise convergence des autres techniques (choix du nœud balancier, capacités séries, résistances négatives, etc.). Le taux de convergence est relativement indépendant de la dimension du système étudié. L'application de cette méthode peut se faire selon les coordonnées rectangulaires ou polaires des tensions de nœuds. Dans cette méthode, la matrice admittance est celle qui est utilisée.

Application par les coordonnées rectangulaires

Comme précédemment, le nœud balancier (slack bus), dont l'amplitude et la phase de tension sont connus, n'est pas inclus dans le processus itératif. Aussi, la puissance du nœud i dans un réseau électrique comportant n nœuds s'écrit:

$$S_i^* = P_i - j Q_i = V_i^* I_i \quad (4.46)$$

ou

$$P_i - j Q_i = V_i^* \sum_{j=1}^n Y_{ij} V_j \quad (4.47)$$

Posons:

$$V_i \equiv e_i + j f_i \quad (4.48)$$

$$Y_{ij} \equiv G_{ij} - j B_{ij} \quad (4.49)$$

Le courant injecté au nœud i , est défini par:

$$I_i = \sum_{j=1}^n Y_{ij} V_j \equiv c_i + j d_i \quad (4.50)$$

Après des substitutions appropriées, l'équation (4.47) se réécrit:

$$P_i - j Q_i = (e_i - j f_i) \sum_{j=1}^n (G_{ij} - j B_{ij})(e_j + j f_j) \quad (4.51)$$

ou encore

$$P_i - j Q_i = (e_i - j f_i) \sum_{j=1}^n (G_{ij} e_j + B_{ij} f_j) + j(G_{ij} f_j - B_{ij} e_j) \quad (4.52)$$

L'expression (4.52) peut ainsi être décomposée en deux équations, l'une correspondant aux puissances actives, l'autre aux puissances réactives:

$$P_i = \sum_{j=1}^n \left[e_i (G_{ij} e_j + B_{ij} f_j) + f_i (G_{ij} f_j - B_{ij} e_j) \right] \quad (4.53)$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^n \left[f_i (G_{ij} e_j + B_{ij} f_j) - e_i (G_{ij} f_j - B_{ij} e_j) \right] \quad (4.54)$$

Il faut noter que P_i , Q_i sont fonctions de e_i , e_j , f_i et f_j . Pour chaque nœud PQ, P_i et Q_i sont respectivement calculés à partir de (4.53) et (4.54), pour des valeurs estimées de e et f . Après chaque itération, les valeurs calculées $P_{i\text{ cal}}$ et $Q_{i\text{ cal}}$ sont comparées aux valeurs spécifiées $P_{i\text{ spec}}$ et $Q_{i\text{ spec}}$.

Similairement, pour chaque nœud PV, l'amplitude de tension peut être calculée à partir des valeurs estimées de e et f :

$$|V_i|^2 = e_i^2 + f_i^2 \quad (4.55)$$

Cette amplitude de tension $|V_{i\text{ cal}}|$ est ensuite comparée à la valeur spécifiée $|V_{i\text{ spec}}|$.

Ainsi, les valeurs corrigées de l'itération k peuvent être exprimées par ce qui est appelé le calcul des mismatches:

$$\Delta P_i^{(k)} = P_{i\text{ spec}} - P_{i\text{ cal}} \quad (4.56)$$

$$\Delta Q_i^{(k)} = Q_{i\text{ spec}} - Q_{i\text{ cal}} \quad (4.57)$$

$$\Delta |V_i|^2 = |V_{i\text{ spec}}|^2 - |V_{i\text{ cal}}|^2 \quad (4.58)$$

Les valeurs obtenues de $\Delta P_i^{(k)}$, $\Delta Q_i^{(k)}$ et $\Delta |V_i|^2$ peuvent être utilisées pour déterminer les changements des composantes réelles et imaginaires des tensions aux nœuds.

Pour les nœuds PV, nous avons:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta |V| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial e} & \frac{\partial P}{\partial f} \\ \frac{\partial |V|}{\partial e} & \frac{\partial |V|}{\partial f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e \\ \Delta f \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

alors que pour les nœuds PQ, nous avons:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial e} & \frac{\partial P}{\partial f} \\ \frac{\partial Q}{\partial e} & \frac{\partial Q}{\partial f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e \\ \Delta f \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Comme il faut veiller à ce que la matrice jacobienne soit carrée, prenons un cas général concret pour dimensionner correctement le système à résoudre.

Considérons d'abord le cas d'un réseau sans nœuds contrôlés. Soit donc un système à n nœuds comportant un nœud balancier (slack bus), m nœuds PV et l nœuds PQ ($l = m - n - 1$). Les équations correspondantes se traduisent par:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta P_n^{(k)} \\ \Delta Q_{m+2}^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta Q_n^{(k)} \\ \Delta |V_2^{(k)}|^2 \\ \vdots \\ \Delta |V_{m+1}^{(k)}|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial e_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial e_n} & \frac{\partial P_2}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial f_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial e_2} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial e_n} & \frac{\partial P_n}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial f_n} \\ \frac{\partial Q_{m+2}}{\partial e_2} & \dots & \frac{\partial Q_{m+2}}{\partial e_n} & \frac{\partial Q_{m+2}}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial Q_{m+2}}{\partial f_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial e_2} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial e_n} & \frac{\partial Q_n}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial f_n} \\ \frac{\partial |V_2|^2}{\partial e_2} & \dots & \frac{\partial |V_2|^2}{\partial e_n} & \frac{\partial |V_2|^2}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial |V_2|^2}{\partial f_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial |V_{m+1}|^2}{\partial e_2} & \dots & \frac{\partial |V_{m+1}|^2}{\partial e_n} & \frac{\partial |V_{m+1}|^2}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial |V_{m+1}|^2}{\partial f_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta e_n^{(k)} \\ \Delta f_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta f_n^{(k)} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

L'équation (4.61) peut s'écrire sous une forme plus compacte:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \\ \Delta |V|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \\ J_5 & J_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e \\ \Delta f \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \Delta e \\ \Delta f \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

La matrice jacobienne est bien carrée puisque de dimension $2(n-1) \times 2(n-1)$.

Dans le cas d'un réseau avec nœuds contrôlés, soit un système à n nœuds comportant un nœud balancier, m nœuds PV, l nœuds PQ et r nœuds contrôlés. Pour répondre à l'exigence des nœuds contrôlés, tout en conservant la dimension carrée de la matrice jacobienne, r équations (ΔQ) parmi les équations des nœuds PQ du système (4.62) sont remplacées par r équations ($\Delta |V|$), ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta P_n^{(k)} \\ \Delta Q_{m+2}^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta Q_{n-r}^{(k)} \\ \Delta |V_2^{(k)}|^2 \\ \vdots \\ \Delta |V_{m+1}^{(k)}|^2 \\ \Delta |V_{n-r+1}^{(k)}|^2 \\ \vdots \\ \Delta |V_n^{(k)}|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial e_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial e_n} & \frac{\partial P_2}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial f_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial e_2} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial e_n} & \frac{\partial P_n}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial f_n} \\ \frac{\partial Q_{m+2}}{\partial e_2} & \dots & \frac{\partial Q_{m+2}}{\partial e_n} & \frac{\partial Q_{m+2}}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial Q_{m+2}}{\partial f_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_{n-r}}{\partial e_2} & \dots & \frac{\partial Q_{n-r}}{\partial e_n} & \frac{\partial Q_{n-r}}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial Q_{n-r}}{\partial f_n} \\ \frac{\partial |V_2|^2}{\partial e_2} & \dots & \frac{\partial |V_2|^2}{\partial e_n} & \frac{\partial |V_2|^2}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial |V_2|^2}{\partial f_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial |V_{m+1}|^2}{\partial e_2} & \dots & \frac{\partial |V_{m+1}|^2}{\partial e_n} & \frac{\partial |V_{m+1}|^2}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial |V_{m+1}|^2}{\partial f_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial |V_{n-r+1}|^2}{\partial e_2} & \dots & \frac{\partial |V_{n-r+1}|^2}{\partial e_n} & \frac{\partial |V_{n-r+1}|^2}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial |V_{n-r+1}|^2}{\partial f_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial |V_n|^2}{\partial e_2} & \dots & \frac{\partial |V_n|^2}{\partial e_n} & \frac{\partial |V_n|^2}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial |V_n|^2}{\partial f_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta e_n^{(k)} \\ \Delta f_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta f_n^{(k)} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Dans (4.60) et (4.62), les inconnues sont les variations (ou corrections) des composantes réelles Δe et imaginaires Δf des tensions. On peut remarquer que deux équations sont nécessaires pour chaque nœud (excepté le slack bus et le nœud de référence) afin d'inclure les termes réels et imaginaires. Tous les éléments du Jacobien fonction des e et des f , peuvent être calculés en substituant les valeurs initialement assumées pour la première itération, ou calculés lors de la dernière itération, dans les équations des dérivées partielles. Ainsi, les valeurs inconnues des Δe et Δf peuvent être déterminées à partir de (4.61) ou (4.63) après inversion de la matrice jacobienne.

Les valeurs obtenues peuvent être ensuite utilisées pour déterminer les nouvelles estimations des tensions des nœuds pour l'itération suivante:

$$e_i^{(k+1)} = e_i^{(k)} + \Delta e_i^{(k)} \quad (4.64)$$

$$f_i^{(k+1)} = f_i^{(k)} + \Delta f_i^{(k)} \quad (4.65)$$

Le processus est répété jusqu'à ce que les valeurs déterminées de $\Delta P_i^{(k)}$, $\Delta Q_i^{(k)}$ et $\Delta |V_i|$ à partir de (4.56)-(4.58) soient inférieures au seuil de tolérance fixé.

Autre notation de P_i et Q_i

Il est possible de développer une expression convenable pour le courant de nœud donné par l'équation (4.50):

$$I_i = \sum_{j=1}^n Y_{ij} V_j = \sum_{j=1}^n (G_{ij} - j B_{ij})(e_j + j f_j) = \sum_{j=1}^n (e_j G_{ij} + f_j B_{ij}) + j (f_j G_{ij} - e_j B_{ij}) = c_i + j d_i \quad (4.66)$$

où

$$c_i = \sum_{j=1}^n (e_j G_{ij} + f_j B_{ij}) = e_i G_{ii} + f_i B_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (e_j G_{ij} + f_j B_{ij}) \quad (4.67)$$

$$d_i = \sum_{j=1}^n (f_j G_{ij} - e_j B_{ij}) = f_i G_{ii} - e_i B_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (f_j G_{ij} - e_j B_{ij})$$

A partir de (4.53), la puissance active P_i s'écrit:

$$P_i = e_i \sum_{j=1}^n (e_j G_{ij} + f_j B_{ij}) + f_i \sum_{j=1}^n (f_j G_{ij} - e_j B_{ij}) = e_i c_i + f_i d_i \quad (4.68)$$

Similairement, à partir de (4.54) on peut réécrire Q_i :

$$Q_i = f_i \sum_{j=1}^n (e_j G_{ij} + f_j B_{ij}) - e_i \sum_{j=1}^n (f_j G_{ij} - e_j B_{ij}) = f_i c_i - e_i d_i \quad (4.69)$$

Les éléments des sous-matrices du Jacobien de l'équation (4.61), peuvent être évalués pour les valeurs de P , Q et $|V|$ pour chaque itération. Pour la sous-matrice J_1 , à partir de (4.68), les éléments diagonaux et non diagonaux s'écrivent alors:

$$\frac{\partial P_i}{\partial e_i} = (e_i G_{ii} - f_i B_{ii}) + c_i \quad i = j \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial e_j} = e_i G_{ij} - f_i B_{ij} \quad i \neq j \quad (4.71)$$

De manière similaire, pour la sous-matrice J_2 , on a:

$$\frac{\partial P_i}{\partial f_i} = (e_i B_{ii} + f_i G_{ii}) + d_i \quad i = j \quad (4.72)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial f_j} = e_i B_{ij} + f_i G_{ij} \quad i \neq j \quad (4.73)$$

Pour la matrice J_3 , on utilise (4.69) pour avoir:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial e_i} = (e_i B_{ii} + f_i G_{ii}) - d_i \quad i = j \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial e_j} = e_i B_{ij} + f_i G_{ij} \quad i \neq j \quad (4.75)$$

Enfin, pour la sous-matrice J_4 , on a:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial f_i} = -(e_i G_{ii} - f_i B_{ii}) + c_i \quad i = j \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial f_j} = -(e_i G_{ij} - f_i B_{ij}) \quad i \neq j \quad (4.77)$$

Application par les coordonnées polaires

Supposons à présent que les variables de base sont données en coordonnées polaires, c'est à dire avec module et argument.

Posons:

$$V_i \equiv |V_i| \angle \delta_i \quad (4.78)$$

$$Y_{ij} \equiv |Y_{ij}| \angle -\theta_{ij} \quad (4.79)$$

Alors, on peut écrire:

$$I_i = \sum_{j=1}^n Y_{ij} V_j = \sum_{j=1}^n |Y_{ij}| |V_j| \angle (-\theta_{ij} + \delta_j) \quad (4.80)$$

D'où, on a:

$$P_i - j Q_i = V_i^* I_i = \sum_{j=1}^n |V_i| |Y_{ij}| |V_j| e^{-j(\theta_{ij} + \delta_i - \delta_j)} \quad (4.81)$$

avec

$$e^{-j(\theta_{ij} + \delta_i - \delta_j)} \equiv \cos(\theta_{ij} + \delta_i - \delta_j) - j \sin(\theta_{ij} + \delta_i - \delta_j) \quad (4.82)$$

Les puissances actives et réactives déduites s'écrivent alors:

$$P_i = \sum_{j=1}^n |V_i| |Y_{ij}| |V_j| \cos(\theta_{ij} + \delta_i - \delta_j) \quad (4.83)$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^n |V_i| |Y_{ij}| |V_j| \sin(\theta_{ij} + \delta_i - \delta_j) \quad (4.84)$$

1^{er} type de formulation

Il est clair qu'on peut montrer que les variations des puissances sont également liées aux variations des amplitudes et phases de tension:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta |V| \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

Les éléments des sous-matrices du Jacobien peuvent être également déterminés. Pour la sous-matrice J_1 , à partir de (4.84), les éléments diagonaux et non diagonaux s'écrivent alors:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |V_i| |Y_{ij}| |V_j| \sin(\theta_{ij} + \delta_i - \delta_j) = -Q_i + |V_i|^2 |Y_{ii}| \sin \theta_{ii} \quad (4.86)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} = |V_i| |Y_{ij}| |V_j| \sin(\theta_{ij} + \delta_i - \delta_j) \quad (4.87)$$

Similairement, pour la sous-matrice J_2 on a:

$$\frac{\partial P_i}{\partial |V_i|} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |Y_{ij}| |V_j| \cos(\theta_{ij} + \delta_i - \delta_j) + 2 |V_j| |Y_{ii}| \cos \theta_{ii} = \frac{P_i}{|V_i|} + 2 |V_j| |Y_{ij}| \cos \theta_{ii} \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial |V_j|} = |V_i| |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} + \delta_i - \delta_j) \quad (4.89)$$

Les éléments de J_3 sont déterminés à partir de (4.85):

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |V_i| |Y_{ij}| |V_j| \cos(\theta_{ij} + \delta_i - \delta_j) = Q_i - |V_i|^2 |Y_{ii}| \cos \theta_{ii} \quad (4.90)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_j} = - |V_i| |Y_{ij}| |V_j| \cos(\theta_{ij} + \delta_i - \delta_j) \quad (4.91)$$

De même, pour la sous-matrice J_4 on obtient:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial |V_i|} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |Y_{ij}| |V_j| \sin(\theta_{ij} + \delta_i - \delta_j) + 2 |V_i| |Y_{ii}| \sin \theta_{ii} = \frac{Q_i}{|V_i|} + 2 |V_i| |Y_{ii}| \sin \theta_{ii} \quad (4.92)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial |V_j|} = |V_i| |Y_{ij}| \sin(\theta_{ij} + \delta_i - \delta_j) \quad (4.93)$$

Dans le cas où un nœud contrôlé est présent dans le réseau, l'équation générale (4.86) doit être modifiée:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \\ \Delta |V| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \\ J_5 & J_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta |V| \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Les éléments des sous-matrices pour le nœud contrôlé i peuvent être déterminés à partir de l'équation:

$$|V_i| = |V_i| \quad (4.95)$$

Aussi, pour J_5 , on obtient des éléments tous nuls:

$$\frac{\partial |V_i|}{\partial \delta_j} = 0 \quad \forall i, j \quad (4.96)$$

De manière similaire, pour la matrice J_6 , les éléments diagonaux ont la valeur unité alors que les éléments non diagonaux sont nuls:

$$\frac{\partial |V_i|}{\partial |V_i|} = 1 \quad i = j \quad (4.97)$$

$$\frac{\partial |V_i|}{\partial |V_j|} = 0 \quad i \neq j \quad (4.98)$$

Il faut préciser que les angles $\Delta\delta$ des équations (4.86) et (4.95) doivent être en radians.

2^{ème} type de formulation

Il a été prouvé qu'il est plus efficace si l'équation (4.86) est modifiée de la manière suivante:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta|V|/|V| \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

Les sous-matrices J_1 et J_3 demeurent inchangées, alors que J_2 et J_4 doivent être modifiées. Par exemple, dans la multiplication de matrices, le terme ij de la sous-matrice J_2 devient:

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial |V_j|} \right) \Delta |V_j| = |V_i| |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} + \delta_i - \delta_j) \Delta |V_j| \quad (4.100)$$

En multipliant le côté droit de (4.101) par $|V_j|/|V_j|$, on obtient:

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial |V_j|} \right) \Delta |V_j| = |V_i| |Y_{ij}| |V_j| \cos(\theta_{ij} + \delta_i - \delta_j) \frac{\Delta |V_j|}{|V_j|} \quad (4.101)$$