Sémantique des formules

- L'objectif de la sémantique de la logique des prédicats est :
  - Donner une signification aux symboles de prédicats
  - Donner une signification aux symboles de fonctions
  - Fixer le domaine dans lequel les variables prennent leurs valeurs
  - Etablir les valeurs de vérité des formules

Sémantique des formules

- La valeur de vérité de la formule dépend de comment on "lit" le symbole de prédicat et du domaine de discours considéré.
- Quelle sera la valeur de vérité de la formule f : $\exists x\ \forall y\ P(x, y)$
- Exemple 1 : Domaine = N, $P(x, y) = x \leq y$
  - La formule se lit : Il existe un entier naturel (x) inférieur ou égale à tous les entiers
  - La formule est vraie
- Exemple 1 : Domaine = N, $P(x, y) = x < y$
  - La formule se lit : Il existe un entier naturel (x) inférieur strictement à tous les entiers
  - La formule est fausse (nous n'avons pas $0 < 0$)

Structure

- On appelle **structure** tout quadruplet **S = (D, C, F, R)** où:

D: est un ensemble *non vide* appelé domaine de discours

C: un ensemble (vide ou non) de constantes

F: un ensemble (vide ou non) de fonctions sur D

R: un ensemble (vide ou non) de relations sur D

Structure

- Exemples :
  - S1=(D,C,F,R) / D = N, C = {0}, F = {+,*,succ}, R = {≤}
  - S2=(D,C,F,R) / D = R, C = {0,1}, F = {+,*,-}, R = ∅
  - S3=(D,C,F,R) / D = N, C = {0}, F = {+,*,-}, R = {≤}
    - N'est pas une structure car la soustraction n'est pas interne dans N
  - S4=(D,C,F,R) / D = ∅, C = {0}, F = {+,*}, R = {≤}
    - N'est pas une structure car le domaine est vide

Interprétation d'un langage

- Soit **L** un langage défini par des symboles de constantes **(c_1,c_2,..,c_n)**, des symboles de fonctions **(f_1,f_2,..,f_n)** et des symboles de prédicats **(p_1,p_2,..,p_n)**.
- Soit **S = (D,C,F,R)** une structure
- Une interprétation de **L** dans **S** consiste à associer :
  - A chaque constante c_i de **L** un élément de **C**. on note $[c_i]_s$
  - A chaque fonction f_i de **L** une fonction de **F**. on note $[f_i]_s : D^n \rightarrow D$
  - A chaque prédicat p_i de **L** une relation de **R**. on note $[p_i]_s$

Interprétation d'un langage

- Exemple 1 :
  - Soit **L1** un langage défini par : Un symbole de constante **c** et un prédicat **p** de poids 2.
    - Soit S1 = (N,{0}, Ø,{≤}). L'interprétation de L1 dans S1 :
      - **$[c]_{s1}$= 0**
      - **$[p(x,y)]_{s1}$= x<y (inférieur(x,y))**
    - Soit S2 = ({Farid,Mohamed,Salah},{Salah}, Ø,{frère-de}). L'interprétation de L1 dans S2 :
      - **$[c]_{s2}$= Salah**
      - **$[p(x,y)]_{s2}$= x frère-de y (frère-de(x,y))**

Interprétation d'un langage

- Exemple 2 :
  - Soit **L2** un langage défini par : Deux symboles de constantes **c1** et **c2**, un symbole de fonction **f** de poids 1, deux symboles de fonctions **g** et **h** de poids 2 et un prédicat **p** de poids 2
    - Soit S = (R,{0,1},{+,*,carré},{<}). L'interprétation de L1 dans S1 :
      - $[c_1]_s = 0$
      - $[c_2]_s = 1$
      - **$[p(x,y)]_s = x<y$ (inférieur(x,y))**
      - $[g(x,y)]_s = x+y$
      - $[h(x,y)]_s = x*y$
      - $[f(x)]s = x^2$

Interprétation d'un langage

- Tout langage a au moins une structure comme interprétation
- Un langage peut avoir plusieurs structures comme interprétations
- Etant donné un langage L et une structure S. il peut exister plusieurs interprétation de L dans S :
  - Exemple :
    - Soit L1 un langage défini par deux constantes c_1 et c_2
    - Soit S1 = (D,{0,1},Ø,Ø)
    - Deux interprétations de L1 dans S1 :
      - **$[c_1]_{s1}= 0$ et $[c_2]_{s1}= 1$**
      - **$[c_1]_{s1}= 1$ et $[c_2]_{s1}= 0$**

Interprétation des variables d'une structure

- Soient **Var**: l'ensemble des variables d'un langage **L**

  et **D**: le domaine d'une interprétation **S** de **L**

- Une valuation **V** pour les variables **Var** dans **S** est une fonction qui attribut à chaque variable **x** de **Var** une valeur **V(x)** de **D**.
- On note : **V: Var → D**

- Exemple : soit D={3,8,9}

  V(x1)=9, V(x2)=3, V(x3)=8 est une valuation

Interprétation des termes

- Soient : **L** un langage, **S** une structure pour **L**, **t** un terme de **L** et **V** une valuation des variables.
- L'interprétation de **t** (valeur de **t**) notée $[t]_{S,V}$ est définie par :
  - Si **t** est une constante **c** alors $[t]_{S,V} = [c]_S$
  - Si **t** est une variable **x** alors $[t]_{S,V} = [x]_S$
  - Si **t** est une fonction $f(t_1,t_2,..,t_n)$ et $[t_i]_{S,V}$ la valuation de t_i dans **S**

    Alors : $[t]_{S,V} = [f]_S \left([t_1]_{S,V} , [t_2]_{S,V} ,\ldots [t_n]_{S,V} \right)$

Interprétation des termes

- Exemple : Soit **L** un langage défini par : Deux symboles de constantes **c1** et **c2**, un symbole de fonction **f** de poids 1, deux symboles de fonctions **g** et **h** de poids 2
  - Soit S = (N,{0,1},{+,*,carré}, ∅). L'interprétation de L dans S :
    - $[c_1]_s = 0$
    - $[c_2]_s = 1$
    - $[g(x,y)]_s = x+y$
    - $[h(x,y)]_s = x*y$
    - $[f(x)]_s = x^2$
  - Soit **V** la valuation des variables / **V(x) = 3, V(y) = 4**
    - $t_1 = g(y,h(c_1,x)) \equiv [t_1]_{S,V} = 4 + (0*3) = 4$
    - $t_2 = f(g(c_2,h(y,x)) \equiv [t_2]_{S,V} = (1 + (4*3))^2 = 169$

Interprétation des formules

- Soient: f une formule d'un langage **L** , **S** une interprétation du langage **L** ayant le domaine **D** et **V** une valuation des variables par rapport à **S**.
- L'interprétation de f par rapport à **S** et **V** et notée $[f]_{S,V}$ est définie par :
  - Si f = $\mathbf{p(t_1,t_2,..,t_n)}$ alors $[f]_{S,V} = \mathbf{p([t_1]_{S,V} , [t_2]_{S,V} ,\ldots[t_n]_{S,V})}$
  - Si $f = \neg f'$ alors $[f]_{S,V} = \neg([f']_{S,V})$
  - Si $f = f'$ k f'' / K $\in\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ alors $[f]_{S,V} = [f']_{S,V}$ K $[f'']_{S,V}$
  - Si $f = \forall x\, f'$ alors $[f]_{S,V} = \forall a \in \mathbf{D}\ ([f']_{S,V})\ [a/x]$
  - Si $f = \exists a\, f'$ alors $[f]_{S,V} = \exists a \in \mathbf{D}\ ([f']_{S,V})\ [a/x]$

Satisfiabilité d'une formule pour une structure et une valuation

- Soient: $\boldsymbol{f}$ une formule d'un langage **L** , **S** une interprétation du langage **L** et **V** une valuation des variables :
  - $\boldsymbol{f}$ est satisfiable dans **S** pour la valuation **V** ≡ $[f]_{S,V}$ **= Vrai**
  - $\boldsymbol{f}$ est non-satisfiable dans **S** pour la valuation **V** ≡ $[f]_{S,V}$ **= Faux**
- **Exemple :**
  - $\forall y\, p(x,y)$ est satisfiable pour S =(D, ∅,∅,{≤}) et la valuation V(x)=0
  - $\forall y\, p(x,y)$ est non-satisfiable pour S =(D, ∅,∅,{≤}) et la valuation V(x)=5

Satisfiabilité d'une formule pour une structure

- Soient: $\boldsymbol{f}$ une formule d'un langage **L** , **S** une interprétation du langage **L** :
  - $\boldsymbol{f}$ est satisfiable pour **S ≡** ∃ **V / [$\boldsymbol{f}$]$_{S,V}$ = Vrai**
  - $\boldsymbol{f}$ est non-satisfiable pour **S ≡** ∀ **V / [$\boldsymbol{f}$]$_{S,V}$ = Faux**
- **Exemple :**
  - $\forall y\, p(x, y)$ est satisfiable pour S =(D, ∅,∅,{≤})
  - $\forall y\, p(x, y)$ est non-satisfiable pour S =(D, ∅,∅,{<})

Satisfiabilité d'une formule

- Soient: $\boldsymbol{f}$ une formule d'un langage **L** :
  - $\boldsymbol{f}$ est satisfiable **≡** ∃**S** ∃**V** / **[$\boldsymbol{f}$]$_{S,V}$ = Vrai**
  - $\boldsymbol{f}$ est non-satisfiable **≡** ∀**S** ∀**V** / **[$\boldsymbol{f}$]$_{S,V}$ = Faux**
- **Exemple :**
  - $\forall y\ p(x, y)$ est satisfiable pour S =(D, ∅,∅,{≤})
  - $\forall y\ (p(x, y) \wedge \neg p(x, y))$ est non-satisfiable