CHAPITRE III

Logique des prédicats

- Limites du calcul propositionnel
- Définition de la logique des prédicats
- Symboles, termes, formule
- Syntaxe des formules
- Variable libre, variable liée
- Substitution
- Unification
- Forme normale conjonctive
- Preuve par résolution

Objectifs

- **Comprendre ce qui est la logique du premier ordre :**
  - Connaitre la syntaxe
  - Savoir décrire des faits sous forme logique du premier ordre
- **Savoir faire du raisonnement déductif en logique du premier ordre :**
  - Prouver qu’un nouveau fait est une conséquence logique d’une base initiale de faits à l’aide de la preuve par résolution
- **La capacité de modéliser un raisonnement déductif nous permettra par la suite de le programmer** (par exemple dans un système expert)

Exemples de raisonnements déductifs

- Prouver que **Marcus hait César** à partir de :
  - Marcus est une personne
  - Marcus est un Pompéien
  - Tous les Pompéiens sont des romains
  - César est un dirigeant
  - Tout le monde est loyal à quelqu'un
  - Tous les romains sont loyaux à César ou le haïssent
  - Les seuls dirigeants qu'une personne essaie d'assassiner sont ceux auxquels elle n'est pas loyale
  - Marcus a essayer d'assassiner César

Exemples de raisonnements déductifs

- Déduire la **maladie du patient** et le **traitement approprié** à partir de :
  - Symptômes d'un patient
  - Règles de causalité entre les symptômes et les pathologies
  - Règles de causalité sur les traitements

- Diagnostiquer les **problèmes d'un véhicule** à partir de :
  - Panne mécanique d'un véhicule
  - Règle de causalité pour la mécanique auto

Définition

- La logique des prédicats se distingue de la logique des propositions par l’adjonction des mécanismes importants, qui permettent de briser les propositions et d’en représenter le contenu.

- Le calcul des prédicats est un langage formel qui permet la formalisation de diverses expressions.

Limitations de la logique propositionnelle

- Le calcul propositionnel est limité lorsqu'il s'agit de décrire des propriétés et des relations et d'en déduire des conclusions.
- Exemple 1 : Si on prend le syllogisme suivant :
  - *P = Tout homme est mortel*
  - *Q = Socrate est homme*
  - *R = Socrate est mortel*
- On ne peut pas déduire R à partir de P et Q
- On doit ajouter une autre proposition :
  - $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ = *Si tout homme est mortel et Socrate est homme alors Socrate est mortel*

Limitations de la logique propositionnelle

- Exemple 1 : Si on prend le syllogisme suivant :
  - *P = Tout homme est mortel*
  - *Q = Socrate est homme*
  - *R = Socrate est mortel*
- *Supposons que nous avons la proposition : S=Platon est homme*

On doit pouvoir déduire : *T=Platon est mortel*

Or : *P et S et l'implication* $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ *: ne permettent en rien de déduire T*

Il nous faut une autre proposition : $(P \wedge S) \Rightarrow T$

- On ne peut pas généraliser,
- On ne peut pas donc représenter toutes les propriétés individuelles (homme, mortel) ou collectives (tout homme).

Prédicat et généralisation

- Si on prend par exemple, la proposition : la baleine est un mammifère
- *Si nous remplaçons « la baleine » par la variable x, nous obtiendrons :*
- *x est un mammifère, qui est Vrai si x = "la baleine" et Faux si x = " l'autruche"*
- *L'expression : « est un mammifère » est appelé **Prédicat***
- *Le prédicat reste inchangé quelque soit la valeur de x*
  - *x est un mammifère ≡ M(x) ou Mammifère(x)*
  - *x est un diviseur de y ≡ D(x,y) ou Diviseur(x,y)*
  - *Exemple : D(x,y)=V si x=2 et y=4, D(x,y)=F si x=3 et y=5*
- *Les valeurs de vérité des prédicats dépondent des valeurs affectées aux variables*
- *Le nombre d'arguments d'un prédicat caractérise l'arité de ce prédicat:*
  - *Prédicat monaire (un seul argument), Prédicat binaire (deux arguments), Prédicat n_aire (n arguments)*

Quantificateur existentiel et quantificateur universel

- Par exemple, pour traduire le fait qu'il y a des étudiants absents ou le fait que tous les étudiants soient présents, le calcul des prédicat introduit deux nouveaux symboles, le quantificateur existentiel ∃ et le quantificateur universel ∀:

- *Si on écrit **Absent(x)** pour dire que x est absent et **Present(x)** pour dire que x est présent, on écrira alors :*
  - $\exists\, x\ Absent(x)$ *pour exprimer que « il y a des absents »*
  - $\forall\, x\ Present(x)$ *pour exprimer que « tout le monde est présent »*

Langage du premier ordre

- Une expression en logique du premier ordre est appelée **formule**
- **Les formules** sont des combinaisons de prédicats, à l'aide de :
  - Connecteurs logiques : ¬ ∧ ∨ → ↔
  - Quantificateurs : ∀ ∃
- **Les prédicats** décrivent des faits (vrai ou faux) qui correspondent souvent à des relations entre objets
- **Les objets** sont décrits par des termes (variables, constantes, fonctions)
- Les prédicats, les connecteurs logiques, les quantificateurs et les termes sont décrits par des symboles **(Alphabet)**

Alphabet

- Connecteurs logiques : $\neg \ \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \ \leftrightarrow$
- Quantificateurs : $\forall \ \exists$
- Ensemble dénombrable de symboles de variables :$\{x, y, z, x_1..xn, y_1..yn\}$
- Ensemble dénombrable de symboles de constantes :

  $\{a, b, c, A, B, C, a1, a2, Mohamed, 21, Robot1, ..\}$
- Ensemble dénombrable de symboles de fonctions :

  $\{f, g, h, Température(x), Position(x), ..\}$
- Ensemble dénombrable de symboles de prédicats :

  $\{P(x), Q(x), Mortel(x), PlusGrand(x, y), PartieTerminée\}$
  - Le nombre d'arguments d'un prédicat ou d'une fonction est appelé **arité**
  - Les prédicats ne sont pas des fonctions qui retournent vrai ou faux

Termes

- Les constantes et les variables sont des termes
- Les applications des fonctions aux termes sont des termes
  - Si $t_1..tn$ sont des termes et f est une fonction à n arguments, alors $f(t_1..tn)$ est aussi un terme
  - Exemple : $f(x), g(x,y), pere(John), pere(x), pere(pere(x))\ldots.$
- On pourrait éviter les fonctions en définissant une constante par argument possible de la fonction :
  - $pereJohn, pereLouis$ au lieu de $pere(John)$ et $pere(Louis)$
  - Par contre, on perd le raisonnement de façon général en utilisant des variables: $\forall x\ \forall y\ sontFreres(x,y) \rightarrow egaux(pere(x), pere(y))$

Formules

- Un prédicat est une formule :
  - Si $t_1..tn$ sont des termes et P est un prédicat à n arguments, alors $P(t_1..tn)$ est une formule
- La négation, la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence de formules sont aussi des formules :
  - Si α et β sont des formules, alors $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \beta, \alpha \leftrightarrow \beta$ sont des formules
- La quantification universelle et la quantification existentielle d'une formule est une formule :
  - Si α est une formule et x est une variable, alors $\forall x\ \alpha$ et $\exists x\ \alpha$ sont des formules

Priorité des connecteurs

- Les connecteurs sont appliqués dans l'ordre : $\neg, \wedge, \vee, (\forall, \exists), \rightarrow, \leftrightarrow$
- Le même connecteur est appliqué de gauche à droite lorsqu'il apparait plusieurs fois dans la même formule
- Les quantificateurs sont également appliqués de gauche à droite
- Exemples :
  - $\forall x\ P(x) \vee \exists y\ Q(y) \wedge P(x)$ se lit $\forall x\ (P(x) \vee \exists y\ (Q(y) \wedge P(x)))$
  - $P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x) \vee R(x, x)$ se lit $P(x) \rightarrow \exists x\ (Q(x) \vee R(x, x))$

Exercice 01

- Ecrire avec des formules logiques d'ordre 1 les énoncés suivants :
  - Tous les chats sont gris
  - Aucun chat n'est gris
  - Les éléphants sont grands et forts
  - Il n'y a pas d'éléphant méchant
  - Certains oiseaux sont des mammifères
  - Il y a des poissons dangereux

Exercice 01

- Ecrire avec des formules logiques d'ordre 1 les énoncés suivants :
  - Tous les chats sont gris $\forall x \; chat(x) \rightarrow gris(x)$
  - Aucun chat n'est gris $\forall x \; chat(x) \rightarrow \neg gris(x)$
  - Les éléphants sont grands et forts $\forall x \; elephant(x) \rightarrow grand(x) \wedge fort(x)$
  - Il n'y a pas d'éléphant méchant $\forall x \; elephant(x) \rightarrow \neg mechant(x)$
  - Certains oiseaux sont des mammifères $\exists x \; oiseau(x) \;\wedge\; mammifere(x)$
  - Il y a des poissons dangereux $\exists x \; poisson(x) \;\wedge\; dangereux(x)$

Exercice 02

- Ecrire avec des formules logiques d'ordre 1 les énoncés suivants :
  - Marcus est une personne
  - Marcus est un Pompéien
  - Tous les Pompéiens sont des romains
  - César est un dirigeant
  - Tout le monde est loyal à quelqu'un
  - Tous les romains sont loyaux à César ou le haïssent
  - Les seuls dirigeants qu'une personne essaie d'assassiner sont ceux auxquels elle n'est pas loyale
  - Marcus a essayer d'assassiner César

Exercice 02

- Marcus est une personne
  - $personne(Marcus)$
- Marcus est un Pompéien
  - $Pompeien(Marcus)$
- Tous les Pompéiens sont des romains
  - $\forall x\; Pompeien(x) \rightarrow romain(x)$
- César est un dirigeant
  - $dirigeant(Cesar)$
- Tout le monde est loyal à quelqu'un
  - $\forall x\; \exists y\; loyal(x, y)$
- Tous les romains sont loyaux à César ou le haïssent
  - $\forall x\; romain(x) \rightarrow loyal(x, Cesar) \vee hait(x, Cesar)$
- Les seuls dirigeants qu'une personne essaie d'assassiner sont ceux auxquels elle n'est pas loyale
  - $\forall x\; \forall y\; personne(x) \wedge dirigeant(y) \wedge assassiner(x, y) \rightarrow \neg loyal(x, y)$
- Marcus a essayer d'assassiner César
  - $assassiner(Marcus, Cesar)$

Champ d'un quantificateur

- Le champ d'un quantificateur est la formule encadrée par la première parenthèse ouvrante à droite du quantificateur et la parenthèse fermante correspondante, lorsque toutes les parenthèses sont placées. Dans les formules ci-dessous, la partie soulignée correspond au champ du quantificateur,

$\forall x\ \underline{\alpha \wedge \beta}$	$\exists x\ \underline{\alpha \wedge \beta}$
$\forall x\ \underline{\alpha} \rightarrow \beta$	$\exists x\ \underline{\alpha} \rightarrow \beta$
$\forall x\ \underline{(\alpha \rightarrow \beta)}$	$\exists x\ \underline{(\alpha \rightarrow \beta)}$

- Exemple : Dans la formule $\forall x\ P(x,y) \wedge Q(y) \rightarrow \exists x Q(x) \wedge P(x,x)$

Le champ de ∀ est la formule $P(x,y) \wedge Q(y)$,

et le champ de ∃ est la formule $Q(x) \wedge P(x,x)$

Variable libre et variable liée

- Une occurrence d'une variable x dans une formule α est liée si elle se trouve dans le champ d'un quantificateur $\mathrm{Q}x$, elle est libre sinon
- Une variable x est libre dans une formule α s'il existe dans α une occurrence libre de x
- Une variable x est liée dans une formule α s'il existe dans α une occurrence liée de x
- Exemple : Dans la formule α: $\forall y\, P(x,y) \wedge Q(y) \rightarrow \exists x Q(x) \rightarrow R(z)$

y est liée, x est libre (la première occurrence de x est libre), x est liée (la deuxième occurrence de x est liée), z est libre (il n'y a aucune occurrence liée de z)