Forme normale conjonctive (FNC)

- On appel « littéral », une proposition élémentaire (atome) ou la négation d'une proposition
- On appel « clause », une disjonction de littéraux
- Une formule α est sous forme normale conjonctive si elle est de la forme **C1∧C2 ∧ … ∧Cn**

  tel que les **Ci** sont de la forme **L1**∨**L2**∨…∨**Ln** (les Li sont des littéraux, les Ci sont des clauses)

Exemples :

- **(P∨Q) ∧ (P∨S)**
- **(P∨Q∨R) ∧ (P∨S)**
- **P ∧ (P∨S)**
- **P∧Q**

  - **Théorème :** Pour chaque formule α, il existe une formule α' écrite sous FNC tel que $\alpha \equiv \alpha'$

Forme normale disjonctive (FND)

- On appel « littéral », une proposition élémentaire (atome) ou la négation d'une proposition
- Une formule α est sous forme normale disjonctive si elle est de la forme **C1**∨**C2**∨…∨**Cn**

  tel que les **Ci** sont de la forme **L1**∧**L2**∧…∧**Ln** (les Li sont des littéraux)

Exemples :

- **(P∧Q)** ∨ **(P∧S)**
- **(P∧Q∧R)∨(P∧S)**
- **P∨(P∧S)**
- **P∨Q**

  - **Théorème :** Pour chaque formule α, il existe une formule α' écrite sous FND tel que $\alpha \equiv \alpha'$

Règles de transformation FNC & FND

- Eliminer les connecteurs logiques → et ↔ :
  - $\mathbf{P \rightarrow Q \equiv \neg P \lor Q}$
  - $\mathbf{P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P)}$
- Ramener les signes de négation immédiatement avant les atomes :
  - $\mathbf{\neg(\neg P) \equiv P}$
  - $\mathbf{\neg(P \land Q) \equiv \neg P \lor \neg Q}$
  - $\mathbf{\neg(P \lor Q) \equiv \neg P \land \neg Q}$
- Distribuer ∧ et ∨ l'un par rapport à l'autre :
  - $\mathbf{P \lor (Q \land R) \equiv (P \lor Q) \land (P \lor R)}$
  - $\mathbf{P \land (Q \lor R) \equiv (P \land Q) \lor (P \land R)}$

FNC & FND

- Exercice 1 : Ecrire sous FNC et FND les formules suivantes :

○ **$P \rightarrow Q$**

○ **$P \leftrightarrow Q$**

$$P \wedge P \equiv P$$

- **$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$** **(FND)**

  $\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ **(FNC)**

  $\equiv (\neg P \vee Q)$ **(FNC)**

$$P \wedge \neg P \equiv F$$

$$P \vee \neg P \equiv V$$

Tiers exclus

- **$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$**

  $\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$ **(FNC)**

  $\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)$

  $\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)$ **(FND)**

FNC & FND

- Exercice 2 : Ecrire sous FNC et FND la formule suivante :

  - $(P \rightarrow \neg Q) \wedge (\neg P \rightarrow \neg S)$

- $(P \rightarrow \neg Q) \wedge (\neg P \rightarrow \neg S) \equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg\neg P \vee \neg S)$

$$\equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg S) \quad \textbf{(FNC)}$$

$$\equiv (\neg P \wedge P) \vee (\neg P \wedge \neg S) \vee (\neg Q \wedge P) \vee (\neg Q \wedge \neg S)$$

$$\equiv (\neg P \wedge \neg S) \vee (\neg Q \wedge P) \vee (\neg Q \wedge \neg S) \quad \textbf{(FND)}$$

FNC & FND

- Exercice 3 : Ecrire sous FNC et FND la formule suivante :
  - $\neg(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \vee (R \rightarrow Q)$

?

FNC & FND

Utilisation de la table de vérité

Exemple : Mettre sous FNC/FND la formule **P ↔ Q** :

P	Q	P↔Q	
V	V	V	FND
V	F	F	FNC
F	V	F	FNC
F	F	V	FND

FND = (P∧ Q) ∨ (¬P ∧ ¬Q)

FNC = (¬P∨Q) ∧ (P∨¬Q)

Système complet de connecteurs

- Un ensemble S de connecteurs est dit complet si :
  - Etant donné une formule α quelconque, on peut trouver une formule α' dans laquelle on ne trouve que les connecteurs de S tel que $\alpha \equiv \alpha'$
  - **S = {¬, ∧, ∨, →, ↔ }**
    - **¬ P**
    - **P∧Q**
    - **P∨Q**
    - **P→Q**
    - **P↔Q**

Système complet de connecteurs

- Exercice 1 :
  - Montrer que l'ensemble S = {¬, V} forme un système complet
    - $\neg$ **P**
    - **P**$\wedge$**Q**
    - **P**$\vee$**Q**
    - **P**$\rightarrow$**Q**
    - **P**$\leftrightarrow$**Q**

Système complet de connecteurs

- Exercice 1 (Solution):
  - Montrer que l'ensemble S = {¬, V} forme un système complet
    - $\neg P \equiv \neg P$
    - $P \wedge Q \equiv \neg\neg(P \wedge Q) \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$
    - $P \vee Q \equiv P \vee Q$
    - $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
    - $P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \equiv \neg\neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P))$

      $\equiv \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))$

  S = {¬, V} est un système complet

Système complet de connecteurs

- Exercice 2 :
  - Montrer que l'ensemble S = {¬,∧} forme un système complet
    - **¬ P**
    - **P∧Q**
    - **P∨Q**
    - **P→Q**
    - **P↔Q**

?