Formule satisfiable

- Une formule $\boldsymbol{\alpha}$ est dite satisfiable ssi : Etant donné la table de vérité de $\boldsymbol{\alpha}$, il existe au moins une ligne dans sa table de vérité où la valeur de vérité est vraie
- Exemple 1 : $\boldsymbol{\alpha}$: **P∨Q → P∧Q**

P	Q	P∨Q	P∧Q	P∨Q → P∧Q
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

$\boldsymbol{\alpha}$ est satisfiable

Formule satisfiable

- Une formule $\boldsymbol{\alpha}$ est dite satisfiable ssi : Etant donné la table de vérité de $\boldsymbol{\alpha}$, il existe au moins une ligne dans sa table de vérité où la valeur de vérité est vraie
- Exemple 2 : $\boldsymbol{\alpha}$: **P∧¬ P**

P	**¬P**	**P∧¬P**
V	F	F
F	V	F

$\boldsymbol{\alpha}$ est insatisfiable

Ensemble satisfiable

- Un ensemble de formules T = $\{\alpha 1, \alpha 2,..,\alpha n\}$ est dit satisfiable ssi : Etant donné la table de vérité de $\alpha 1, \alpha 2,..,\alpha n$, il existe au moins une ligne où $\alpha 1, \alpha 2,..,\alpha n$ sont vraies simultanément
- Exemple : T = {**P∧Q, P∨Q, P→Q, P↔Q**}

P	Q	P∧Q	P∨Q	P→Q	P↔Q
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

T est satisfiable

Tautologie

- Une formule $\boldsymbol{\alpha}$ est dite Tautologie (formule valide) ssi : Etant donné la table de vérité de $\boldsymbol{\alpha}$,

$\boldsymbol{\alpha}$ est vraie sur toutes les lignes (On note : $\models \boldsymbol{\alpha}$)

- Exemple 1 : $\boldsymbol{\alpha}$: **P∧Q → P∨Q**

P	**Q**	**P∧Q**	**P∨Q**	**P∧Q → P∨Q**
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

$\boldsymbol{\alpha}$ est une tautologie

Tautologie

- Une formule α est dite Tautologie (formule valide) ssi : Etant donné la table de vérité de α

α est vraie sur toutes les lignes (On note : $\models \alpha$)

- Exemple 2 : α : **P∨Q → P∧Q**

P	Q	P∨Q	P∧Q	P∨Q → P∧Q
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

α n'est pas une tautologie

Antilogie

- Une formule $\boldsymbol{\alpha}$ est dite Antilogie (anti-tautologie, formule insatisfiable) ssi : Etant donné la table de vérité de $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}$ est fausse sur toutes les lignes
- Exemple : $\boldsymbol{\alpha}$: **P∧¬ P**

P	**¬P**	**P∧¬P**
V	F	F
F	V	F

$\boldsymbol{\alpha}$ est une antilogie

Conséquence logique

- Une formule $\boldsymbol{\beta}$ est dite conséquence logique de $\boldsymbol{\alpha}$ (on note $\boldsymbol{\alpha} \models \boldsymbol{\beta}$) ssi : Etant donné les tables de vérité de $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\beta}$ est vraie sur toutes les lignes où $\boldsymbol{\alpha}$ est vraie
- Exemple 1 : $\mathbf{P \vee Q \models P \wedge Q}$ **?** (Non)
- Exemple 2 : $\mathbf{P \wedge Q \models P \vee Q}$ **?** (Oui)

P	**Q**	**P∧Q**	**P∨Q**
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Conséquence logique d'un ensemble de formules

- Une formule $\boldsymbol{\beta}$ est dite conséquence logique d'un ensemble de formule T = $\{\boldsymbol{\alpha 1}, \boldsymbol{\alpha 2},..,\boldsymbol{\alpha n}\}$(on note$\{\boldsymbol{\alpha 1}, \boldsymbol{\alpha 2},..,\boldsymbol{\alpha n}\} \models \boldsymbol{\beta}$) ssi : Etant donné les tables de vérité de T, $\boldsymbol{\beta}$ est vraie sur toutes les lignes où T est vraie (les formules $\boldsymbol{\alpha 1}, \boldsymbol{\alpha 2},..,\boldsymbol{\alpha n}$ sont vraies simultanément)
- Exemple 1 : **{P∧Q, P∨Q, P→Q, P↔Q}** ⊨ **P ?** (OUI)
- Exemple 2 : **{P∧Q, P∨Q, P→Q, P↔Q}** ⊨ **¬Q ?** (NON)

P	Q	P∧Q	P∨Q	P→Q	P↔Q
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Equivalence logique

- Deux formules $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ sont équivalentes (on note $\boldsymbol{\alpha} \equiv \boldsymbol{\beta}$) si elles ont les mêmes valeurs dans toutes les interprétations.
- Exemples :
  - **P→Q ≡ ¬P ∨Q**
  - **P↔Q ≡ (P→Q) ∧ (Q→P)**

P	**Q**	**¬P**	**P→Q**	**Q→P**	**¬P∨Q**	**P↔Q**	**(P→Q) ∧ (Q→P)**
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V

Equivalence logique

- Exercice : Mohamed demande à Ali et Salah de deviner quelle est la couleur de la boule qu'il tient dans sa main,
  - Ali répond : « si elle est noire ou si elle est blanche, alors elle est noire »
  - Salah répond : « si elle n'est pas noire, alors soit elle n'est pas blanche soit elle est noire »
- Montrer que Ali et Salah disent la même chose **?**
- Sachant que Ali et Salah disent tous les deux la vérité (la boule est soit noire soit blanche), Quelle est la couleur de la boule **?**

Equivalence logique

- Exercice (Solution) : Mohamed demande à Ali et Salah de deviner quelle est la couleur de la boule qu'il tient dans sa main,

P : elle est noire Q : elle est blanche

- Ali répond : « si elle est noire ou si elle est blanche, alors elle est noire »

  $\equiv P \vee Q \rightarrow P$

- Salah répond : « si elle n'est pas noire, alors soit elle n'est pas blanche soit elle est noire »

  $\equiv \neg P \rightarrow \neg Q \vee P$

- Montrer que Ali et Salah disent la même chose **?** $P \vee Q \rightarrow P \equiv \neg P \rightarrow \neg Q \vee P$

P	**Q**	**¬P**	**¬Q**	**PVQ**	**¬QVP**	**PVQ→P**	**¬P→ ¬QVP**
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V	V

Equivalence logique

- Exercice (Solution) : Mohamed demande à Ali et Salah de deviner quelle est la couleur de la boule qu'il tient dans sa main,

P : elle est noire Q : elle est blanche

- Quelle est la couleur de la boule **?**

- $P \vee Q \rightarrow P$
- $\neg P \rightarrow \neg Q \vee P$
- $P \vee Q \rightarrow P \equiv \neg P \rightarrow \neg Q \vee P$

- $P \vee Q \rightarrow P \equiv \neg(P \vee Q) \vee P \equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee P \equiv (\neg P \vee P) \wedge (\neg Q \vee P) \equiv \neg Q \vee P$ ……………………………. (1)
- $\neg P \rightarrow \neg Q \vee P \equiv P \vee \neg Q \vee P \equiv P \vee \neg Q \equiv \neg Q \vee P$ …………………………………. (2)
- A partir de (1) et (2) : La boule est noire

Modèle d'une formule propositionnelle

- Un modèle d'une formule propositionnelle f est une valuation V tel que V[f] = Vrai
- Exemple : La formule f = (P∨Q) → (P∧Q) a deux modèles :
  - M1 : V(P) = Vrai, V(Q) = Vrai
  - M2 : V(P) = Faux, V(Q) = Faux

P	**Q**	**P∨Q**	**P∧Q**	f
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

Modèle d'un ensemble de formules

- Un modèle d'un ensemble T de formules propositionnelles est une valuation V qui satisfait toutes les formules de T. V est un modèle de T → $\forall f \in T$, $V[f]$ = Vrai
- Exemple : L'ensemble T = {P∧Q, P∨Q, P→Q, P↔Q} a un seul modèle :
  - M1 : V(P) = Vrai, V(Q) = Vrai

P	Q	P∧Q	P∨Q	P→Q	P↔Q
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Compatibilité

- Une formule propositionnelle est dite **compatible** SSI elle a au moins un modèle
- Un ensemble de formules propositionnelles est dit **compatible** SSI il a au moins un modèle
- Une formule/Un ensemble **satisfiable** a au moins un modèle
- Une formule/Un ensemble **non satisfiable** n'a aucun modèle (**Incompatible**)