Propriétés des connecteurs

- Commutativité de $\wedge$ et $\vee$:
  - $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
  - $P \vee Q \equiv Q \vee P$
- Associativité de $\wedge$ et $\vee$:
  - $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$
  - $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
- Distributivité de $\wedge$ et $\vee$:
  - $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
  - $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
- Autres propriétés :
  - $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
  - $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

    Lois de Morgan
  - $\neg\neg P \equiv P$
  - $P \wedge P \equiv P$
  - $P \vee P \equiv P$

    Idempotence
  - $P \rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q) \equiv \neg P \vee Q$
  - $P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$
  - $P \vee Q \equiv \neg P \rightarrow Q$

    Propriétés de $\rightarrow$
  - $P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

A vérifier avec la table de vérité

Propriétés des connecteurs

- Utiliser la table de vérité pour vérifier les équivalences suivantes :

  - $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
  - $P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$
  - $P \vee Q \equiv \neg P \rightarrow Q$

P	Q	¬P	¬Q	P→Q	¬P∨Q	¬Q → ¬P	P∨Q	¬P→Q
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	F	F

Formules propositionnelles

- Les propositions atomiques sont des formules
- Les propositions complexes sont des formules
  - si P et Q sont des formules alors $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$, $(P \leftrightarrow Q)$, $\neg P$ sont des formules
- Utilisation des parenthèses
  - Les parenthèses (…) sont un moyen de lever l'ambiguïté.
  - $P \rightarrow Q \leftrightarrow \neg R \quad \equiv \quad (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg R)$
  - $P \rightarrow Q \rightarrow R \quad \equiv \quad (P \rightarrow Q) \rightarrow R$

Exemples de Formules

Formule	Non-Formule
P	P+Q
(¬P)	P¬Q
P→Q	∧ Q
(P ∧ (Q))	(∧)
(¬(P ∧ Q) ∨ R)	(Q
(P → (Q ∨ R))	(P → (Q ∨ R)

Sous-Formule propositionnelle

- Les sous-formules d'une formule f sont définies par :
  - f est une sous-formule de f
  - Si $\neg f'$ est une sous-formule de f alors f' est une sous-formule de f
  - Si k ∈ {∧, ∨, →, ↔} et f_1 k f_2 est une sous-formule de f alors f_1 et f_2 sont des sous-formules de f
- Une sous-formule de f est dite **stricte** si elle est différente de f elle même

Sous-Formule propositionnelle

- Exemple :
  - L'ensemble des sous formules de $(((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow R)$ est :

    $\{(((P \vee Q) \wedge \neg P) \rightarrow R), ((P \vee Q) \wedge \neg P), R, (P \vee Q), \neg P, P, Q\}$

  - L'ensemble des sous formules de $\neg\neg\neg P$ est :

    $\{\neg\neg\neg P, \neg\neg P, \neg P, P\}$

Arbre syntaxique d'une formule propositionnelle

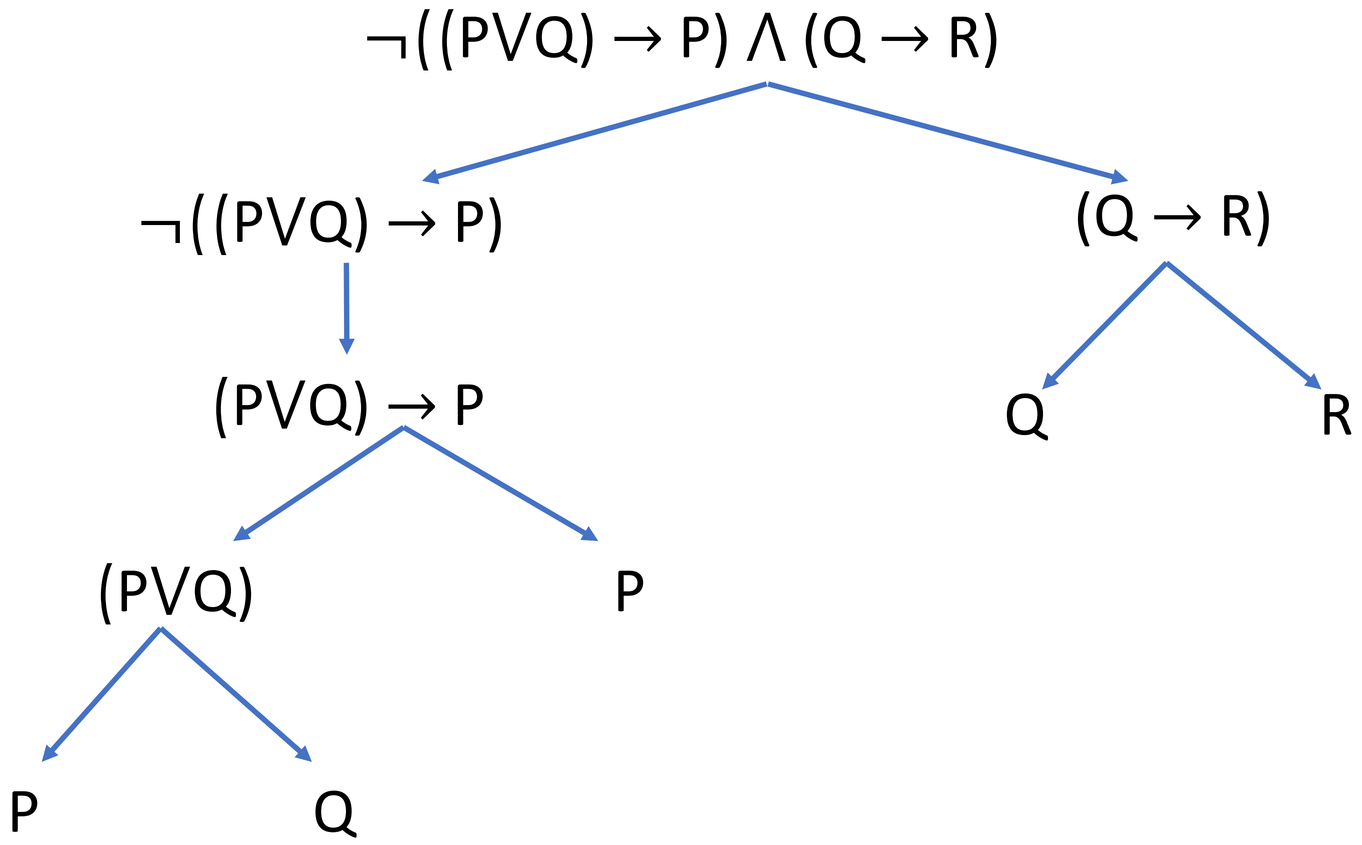
Arbre de décomposition

- Pour chaque formule propositionnelle f il est possible de retrouver les sous-formules qui ont servi à la construire :
- Procédure de décomposition :
  - Découper au niveau du connecteur principal de f
  - Enlever les parenthèses les plus externes de chacun des arguments du connecteur principal
  - Répéter l'opération de décomposition pour chacun des arguments jusqu'à arriver aux variables
- **Les nœuds de l'arbre de décomposition d'une formule f sont les sous-formules de f**

Arbre syntaxique d'une formule propositionnelle

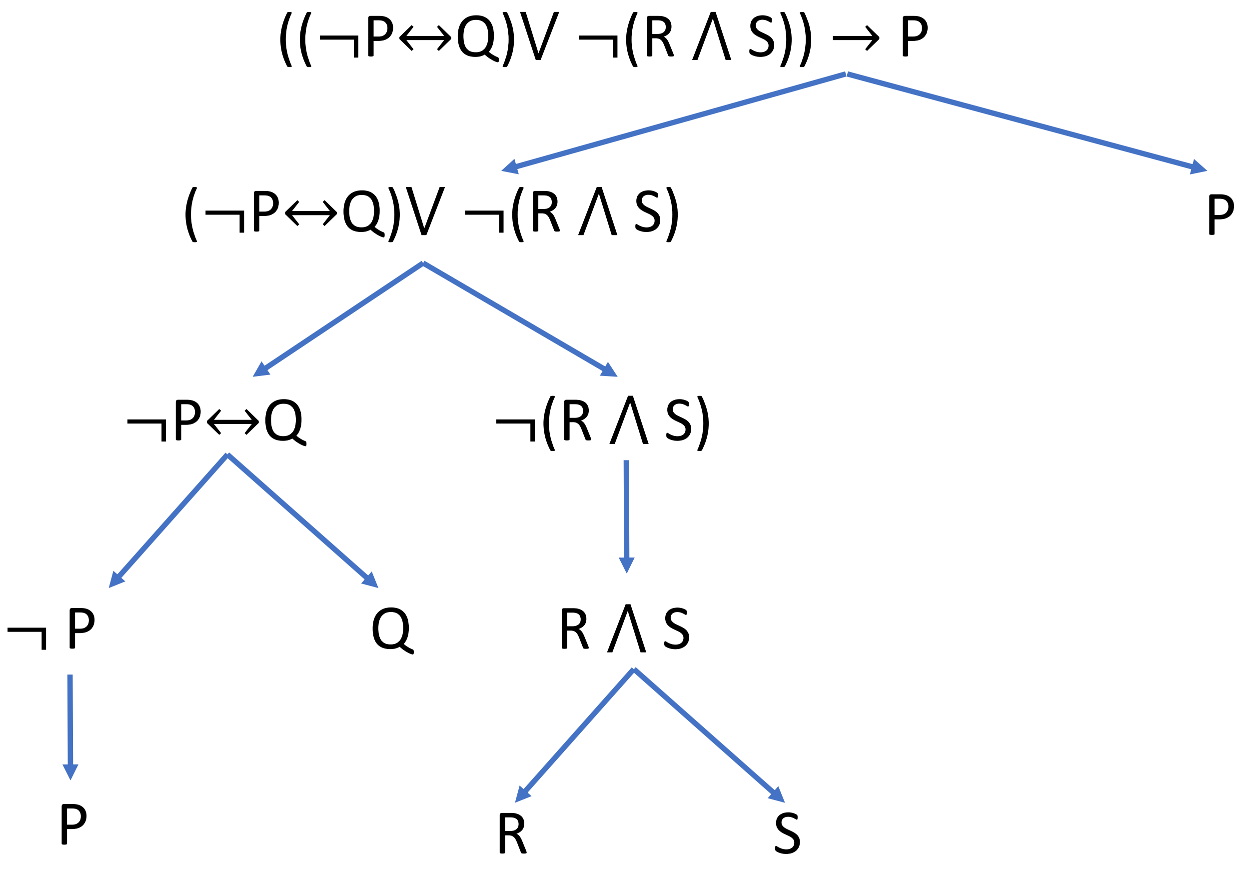
Arbre de décomposition

- Construire l'arbre de décomposition de la formule suivante :



Arbre de décomposition

- Construire l'arbre de décomposition de la formule suivante :



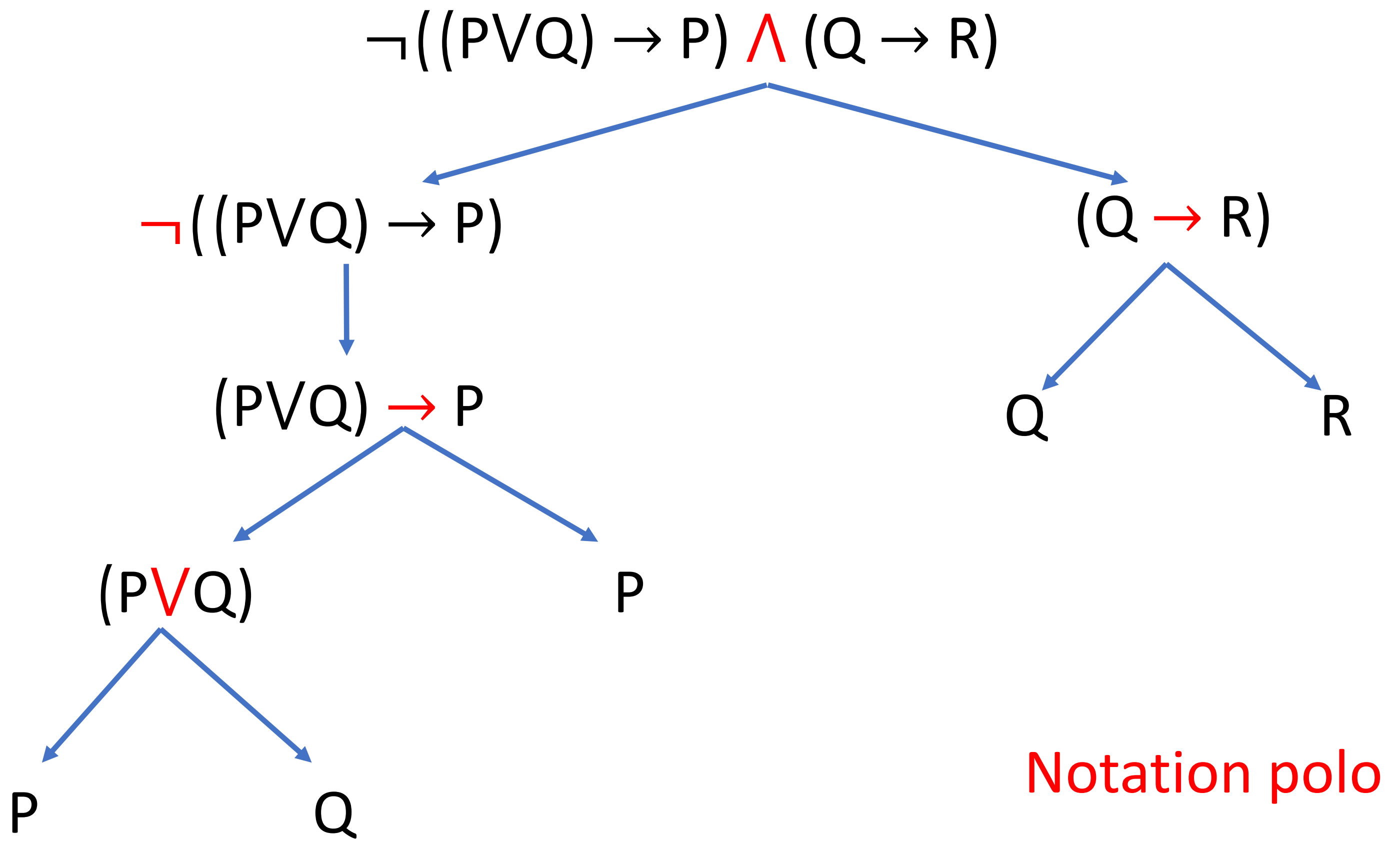
Notation préfixée (polonaise) d'une formule

- Les formules peuvent êtres représentées par la notation polonaise qui consiste à mettre les connecteurs en tête de la formule,
- La notation polonaise se déduit en parcourant l'arbre de décomposition comme suit :

Racine, Branche gauche, Branche droite

Notation préfixée (polonaise) d'une formule

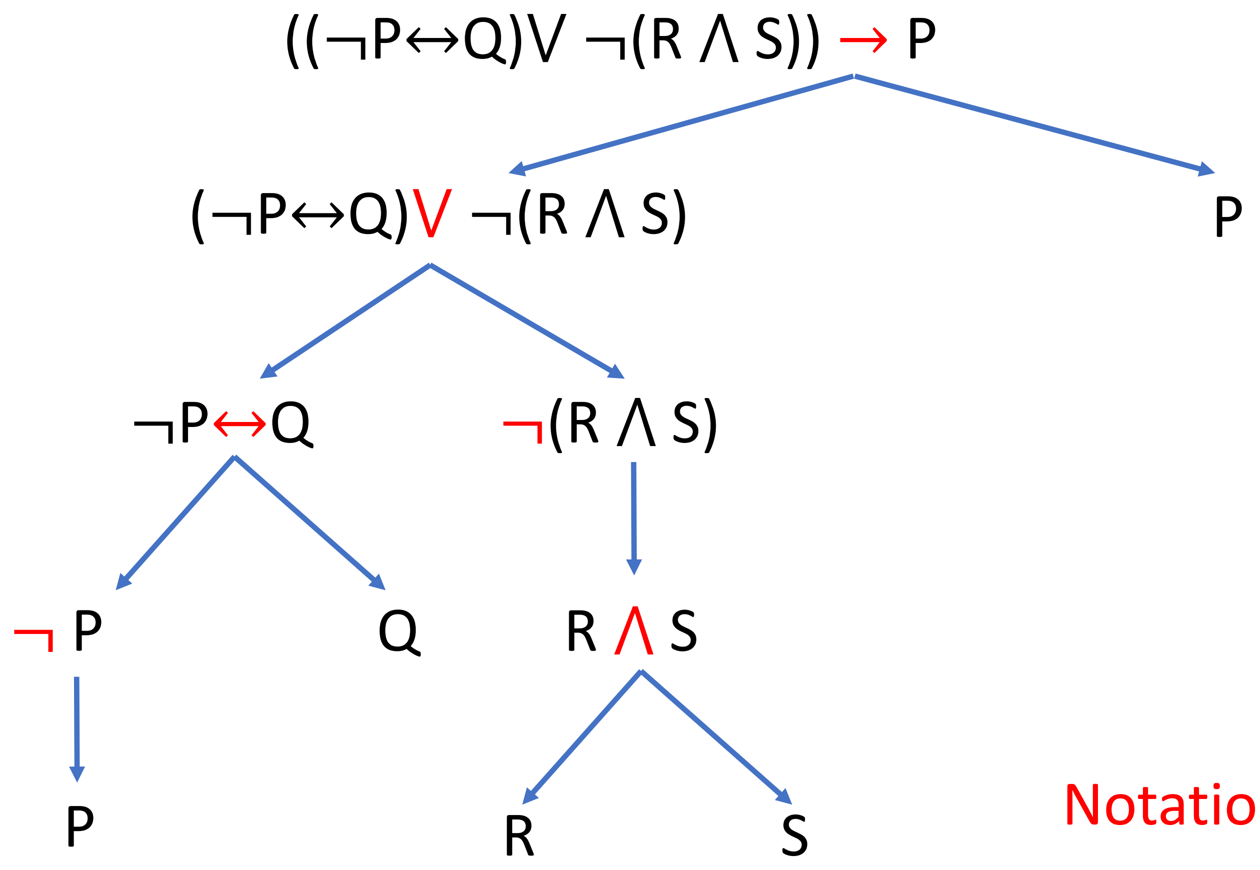
- Exemple 1 : notation polonaise de la formule $\neg((P \vee Q) \rightarrow P) \wedge (Q \rightarrow R)$



Notation polonaise : $\wedge\ \neg \rightarrow\ \vee\ PQP\ \rightarrow QR$

Notation préfixée (polonaise) d'une formule

- Exemple 2 : notation polonaise de la formule $((\neg P \leftrightarrow Q) \vee \neg(R \wedge S)) \rightarrow P$



Notation polonaise : $\rightarrow \vee \leftrightarrow \neg P\ Q \neg \wedge R\ S\ P$

Notation préfixée (polonaise) d’une formule

Calcul de vérité

- La valeur de vérité d’une formule peut être calculée comme suit :
  - Parcourir la formule (notation polonaise) de droite à gauche,
  - Si on rencontre un connecteur unaire (¬), on l'applique à la variable située à sa droite (on remplace ce connecteur et cette variable par la valeur de vérité résultante)
  - Si on rencontre un connecteur binaire, on l'applique aux deux propositions à sa droite (on remplace ce connecteur et les deux propositions par le résultat)

Notation préfixée (polonaise) d'une formule

Calcul de vérité

- Exemple 1 :
  - soit la formule : $\neg((P \vee Q) \rightarrow P) \wedge (Q \rightarrow R)$
  - Soit P = Vrai, Q = Faux, R = Vrai
  - La notation polonaise de la formule : $\wedge \neg \rightarrow \vee PQP \rightarrow QR$

$$\wedge \neg \rightarrow \vee PQP \underbrace{\rightarrow QR}_{\textbf{Vrai}}$$

$$\wedge \neg \rightarrow \underbrace{\vee PQ}_{\textbf{Vrai}} P \ \textbf{Vrai}$$

$$\wedge \neg \underbrace{\rightarrow \textbf{Vrai}\ P}_{\textbf{Vrai}} \ \textbf{Vrai}$$

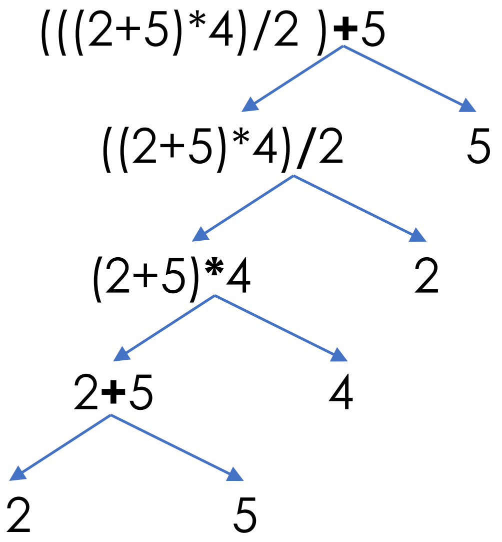
$$\wedge \underbrace{\neg \textbf{Vrai}}_{\textbf{Faux}} \ \textbf{Vrai}$$

$$\underbrace{\wedge \ \textbf{Faux}\ \textbf{Vrai}}_{\textbf{Faux}}$$

Notation préfixée (polonaise) d'une formule

Calcul arithmétique

- Exemple 2 :
  - soit l'expression : (((2+5)*4)/2)+5
  - La notation polonaise : + / * + 2 5 4 2 5
    - + / * + 2 5 4 2 5
    - + / * 7 4 2 5
    - + / 28 2 5
    - + 14 5
    - 19



Longueur d'une formule

- La longueur d'une formule est le nombre de symboles de l'alphabet qu'elle contient

Formule	Longueur
P	1
$\neg P$	2
$\neg (P)$	4
$\neg((P)\wedge(Q))$	10
$(\neg(P)\wedge(Q)) \rightarrow R$	12
$((P)\wedge(Q)) \rightarrow ((R)\wedge(S))$	19

Profondeur d'une formule

- La profondeur d'une formule correspond à son arbre de décomposition. C'est le nombre de branche qui sépare la racine (Niveau 0) de la branche la plus éloignée

Formule	Profondeur
P	0
$\neg P$	1
$\neg (P)$	1
$\neg((P)\wedge(Q))$	2
$(\neg(P)\wedge(Q)) \rightarrow R$	3
$((P)\wedge(Q)) \rightarrow ((R)\wedge(S))$	2

Complexité (ordre) d’une formule

- La complexité d’une formule est le nombre de connecteurs qu’elle contient

Formule	Complexité
P	0
$\neg P$	1
$\neg (P)$	1
$\neg((P)\wedge(Q))$	2
$(\neg(P)\wedge(Q)) \rightarrow R$	3
$((P)\wedge(Q)) \rightarrow ((R)\wedge(S))$	3

Substitution propositionnelle

Substitution simple

- Une substitution associe à une variable propositionnelle P une formule α .

  Elle est notée $[\alpha/\mathrm{P}]$.

- L'application de $[\alpha/\mathrm{P}]$ à une formule f (notée $f[\alpha/\mathrm{P}]$) est le résultat de remplacement simultané de toutes les occurrences de P dans f par α.

Substitution propositionnelle

Substitution simple

- Exemples :

Formule [Substitution]	Formule après substitution
$(P \vee Q)$ [R/P]	$R \vee Q$
$(P \rightarrow Q)$ [P/Q]	$P \rightarrow P$
$(P \rightarrow Q)$ [S/R]	$P \rightarrow Q$
$((P \vee Q) \wedge \neg P)$ [¬P/P]	$(\neg P \vee Q) \wedge \neg\neg P$
$((P \vee Q) \wedge \neg P)$ [(R∧S)/P]	$((R \wedge S) \vee Q) \wedge \neg(R \wedge S)$
$(P \rightarrow S)$ [(Q → R)/P]	$(Q \rightarrow R) \rightarrow S$

Substitution propositionnelle

Substitution simultanée

- Une substitution simultanée consiste à substituer simultanément n variables propositionnelles dans une formule f
- On note $f\,[\alpha_1/P_1,\ \alpha_2/P_2,\ldots,\ \alpha_n/P_n]$ la substitution dans f des variables propositionnelles P_i par les formules α_i
- Les P_i sont distincts

Substitution propositionnelle

Substitution simultanée

- Exemples :

Formule [Substitution]	Formule après substitution
$(P \vee Q)\ [R/P, S/Q]$	$R \vee S$
$(P \rightarrow Q)\ [P/Q, R/P]$	$R \rightarrow P$
$(P \rightarrow Q)\ [S/R, P/P]$	$P \rightarrow Q$
$((P \vee Q) \wedge \neg P)\ [\neg P/P, (P \wedge Q)/Q]$	$(\neg P \vee (P \wedge Q)) \wedge \neg\neg P$

Substitution propositionnelle

Substitution composée

- Plusieurs substitutions peuvent être appliquées à une formule,
- On note $(f\,[\alpha_1/P_1,\ \alpha_2/P_2,\ldots,\ \alpha_n/P_n])\ [\beta_1/Q_1,\beta_2/Q_2,\ldots,\beta_n/Q_n]$
- Substituer dans f les variables P_i par les formules α_i , dans la formule

  obtenue, substituer les variables Q_i par les formules β_i

Substitution propositionnelle

Substitution composée

- Exemples :

Formule [Substitution]	Formule après substitution
$((P \vee Q)\ [(Q \rightarrow R)/P])\ [\neg Q/Q]$	$(\neg Q \rightarrow R) \vee \neg Q$
$((P \rightarrow Q)\ [P/Q])\ [(R \wedge S)/P]$	$(R \wedge S) \rightarrow (R \wedge S)$
$((P \rightarrow Q)\ [S/R])\ [P/P]$	$P \rightarrow Q$
$(((P \vee Q) \wedge \neg P)\ [\neg P/P])\ [(P \wedge Q)/Q]$	$(\neg P \vee (P \wedge Q)) \wedge \neg\neg P$