→ ¬↔≡ φεθ∀∃⊢ ∧∨→ ¬↔≡ φεθ∀∃⊢ ∧∨→ ¬↔≡ φεθ∀∃⊢ ∧∨

LOGIQUE MATHEMATIQUE

MATHEMATICAL LOGIC

المنطق الرياضي

→ ¬↔≡ φεθ∀∃⊢ ∧∨→ ¬↔≡ φεθ∀∃⊢ ∧∨→ ¬↔≡ φεθ∀∃⊢ ∧∨

Logique: La matière

- Logique mathématique : Coefficient : 2 Crédits : 4

- Liens:
  - Plateforme : elearning.univ-km.dz
  - Cours: http://logicdz.blogspot.com
  - E-mail: mistudents14@gmail.com

PLAN

- **Chapitre 1 : Introduction**

  (Définition, Histoire, Formules, Déductions, Interprétations)

- **Chapitre 2 : Logique des propositions**
  - i. Syntaxe

  (Propositions, Connecteurs logiques, Variables propositionnelles, Formules logiques, Arbre syntaxique)
  - ii. Sémantique

  (Interprétation, Tables de vérité, Tautologies et antilogies, Equivalence sémantique, Formes normales conjonctives et disjonctives, Système complet, Théorie de démonstration..)
  - iii. Résolution

  (Réfutation, Règle de résolution propositionnelle, La méthode de résolution propositionnelle)

- **Chapitre 3: Logique des prédicats**
  - i. Syntaxe

  (Termes, Prédicats, Quantificateurs, Formules : - Portée d'un quantificateur - Variables libres, variables liées, Substitution, Unification)
  - ii. Sémantique

  (Structure, Satisfaction d'une formule)
  - iii. Résolution

Quelques références

- Principia mathmatica : Alfred North Whitehead, Bertrand Russell-Cambridge University Press (1997) (publié pour la première fois en 1910)

- Introduction à la logique : Alfred Tarski, Gauthier-Villars (1971)

- Logique mathematique, tome 1. Calcul propositionnel, algebre de Boole, calcul des predicats : Cori R., Lascar D. - Dunod (2003)

- Logique pour l'informatique et pour l'intelligence artificielle : Ricardo Caferra - Hermes Science Publications (2010)

CHAPITRE I

INTRODUCTION

- Définition de la logique mathématique
- Histoire
- Logique & Maths
- Logique & Informatique
- Syntaxe & Sémantique

Logique : Définition

- Logique mathématique **?**
  - Discipline des mathématiques introduite à la fin du XIX^{e} siècle
  - Objet : l'étude des mathématiques en tant que langage
  - Etablir la valeur de vérité des propositions et de construire des raisonnements mathématiques

- Objets fondamentaux :
  - Formules : modélisent les énoncés mathématiques
  - Dérivations ou Démonstrations (Déductions): modélisent les raisonnements
  - Sémantiques ou modèles : modélisent le sens des formules (interprétation des formules)

Histoire

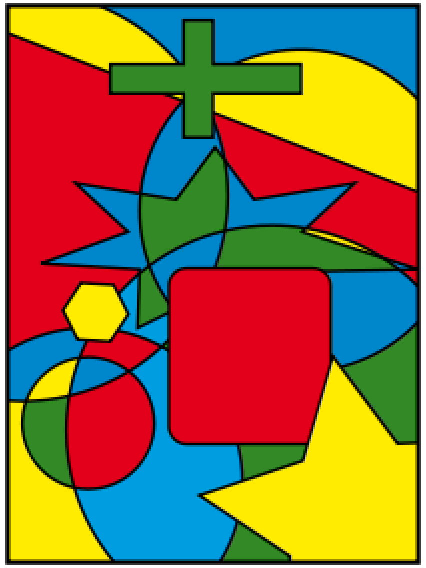
- George Boole (XIX^{e} siècle): Calcul de vérité, Combinaisons logiques (conjonction, disjonction, implication,..) [opérations booléennes, table de vérité]
- David Hilbert (1900): Cohérence arithmétique [démontrer la non-contradiction des axiomes de l'arithmétique]
- Kurt Godel (1929): Théorème de complétude (tout raisonnement mathématique peut être formalisé dans le calcul des prédicats)
  - Théorème d'incomplétude (1931)
- Alonzo Church, Alan Turing, Stephen Kleene,.. (1930^{s}): Définition d'algorithme, complexité algorithmique

Interaction entre logique et mathématiques

- Théorie des modèles (Algèbre)
- Théorie des groupes, Combinatoire
- Théorie des ensembles, de la mesure,..
- Théorie de la calculabilité, Complexité algorithmique
- Théorie de la démonstration
- Algèbre linéaire

Interaction entre logique et informatique

- Formalisation des mathématiques dans des systèmes logiques
- Démonstrateurs automatiques
- Systèmes experts et règles de production
- Assistants de preuve
- Ontologies et web sémantique


Théorème des quatre couleurs

Syntaxe et sémantique

- **Systèmes logiques :** Système formel constitué de trois composantes. Formules et Déductions (représentent la syntaxe), Interprétations des formules (Définit la sémantique)
  - Ensemble de formules (faits) : Enoncés mathématiques exprimés formellement par des moyens combinatoires(suite de symboles, arbres,..)
  - Ensemble de déductions : Une déduction permet de dériver (déduire) des formules (les *formules prouvables* ou *théorèmes*) à partir de formules de départ (les *axiomes*) au moyen de règles (les *règles d'inférence*)
  - Interprétation des formules : il s'agit d'une fonction associant à toute formule un objet dans une structure abstraite appelée *modèle (sens)*, ce qui permet de définir la *validité* des formules

Syntaxe et sémantique

- Les formules et les déductions sont des objets finis
  - Utilisation d'algorithme pour déterminer si une formule ou une déduction est correcte

- La sémantique fait appel à des objets infinis
  - Calculer la vérité des formules

CHAPITRE II

Logique des propositions

- Proposition **?**
- Connecteurs et formules
- Table de vérité
- Tautologie, Antilogie, Equivalence
- F.N.C, F.N.D
- Méthodes de résolution

Calcul propositionnel : Objectifs

- Comment écrire une formule (syntaxe)
- Comment déterminer la valeur de vérité d'une formule (sémantique)
- Comment démontrer de nouveaux résultats (déduction)

Proposition ?

- Une proposition est une assertion (énoncé) qui peut être vraie ou fausse
- Exemples :
  - Tous les hommes vont mourir
  - Socrate est un menteur
  - Tout nombre premier est impair
  - 1 + 1 = 2
- Contre exemples :
  - Que venez-vous faire ici ? (interrogative)
  - Ah ! Je ne crois pas mes yeux ! (exclamative)
  - Taisez-vous (impérative)
  - Cette phrase est fausse (paradoxe du menteur)

Variable propositionnelle

- Une proposition (atome, proposition élémentaire) est représentée par une variable
- Exemples :
  - Tous les hommes vont mourir ≡ **P**
  - Socrate est un menteur ≡ **Q**
  - Tout nombre premier est impair ≡ **R**
  - 1 + 1 = 2 ≡ **S**
- Soit P une proposition, P doit satisfaire les trois principes :
  - Principe d’identité (P est P): si P est vrai alors P est vrai et si P est faux alors P est faux
  - Principe de non contradiction : P ne peut pas à la fois être vrai et faux
  - Principe du tiers exclus : si P est vrai, la négation de P est faux

Connecteurs logiques

- Les connecteurs sont des opérateurs permettent de construire de nouvelles propositions à partir d'une ou de plusieurs propositions initiales.

Connecteur	**Opération**	**Exemple**
$\neg$	Négation (non)	$\neg P$
$\wedge$	Conjonction (et)	$P \wedge Q$
$\vee$	Disjonction (ou)	$P \vee Q$
$\rightarrow$	Implication (implique)	$P \rightarrow Q$
$\leftrightarrow$	Equivalence (équivalent à)	$P \leftrightarrow Q$

Plus prioritaire

$\downarrow$

Moins prioritaire

Table de vérité

- Une proposition peut prendre deux valeurs de vérité : VRAI (V) ou FAUX (F)
- Il faut bien faire la distinction entre une proposition (qui est une phrase) et sa valeur (qui est soit VRAI soit FAUX)

P	**Q**	**¬P**	**P∧Q**	**P∨Q**	**P→Q**	**P↔Q**
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Exercice

- Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses ensuite écrire leurs négations :
  - 5 est un nombre inférieur à 10
  - 5 est un nombre pair
- Traduire les énoncés suivants en langages propositionnel ensuite calculer leurs valeurs de vérité (utiliser la table de vérité):
  - 5 est un nombre inférieur à 10 ET 5 est un nombre pair
  - 5 est un nombre inférieur à 10 OU 5 est un nombre pair
  - Si 5 est un nombre inférieur à 10 ALORS 5 est un nombre pair

Exercice (Solution)

- Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses ensuite écrire leurs négations :
  - **P** : 5 est un nombre inférieur à 10 (**P est vraie**) - $\neg$**P** : 5 est un nombre supérieur ou égal à 10
  - **Q** : 5 est un nombre pair (**Q est fausse**) - $\neg$**Q**: 5 est un nombre impair
- Traduire les énoncés suivants en langages propositionnel ensuite calculer leurs valeurs de vérité (utiliser la table de vérité):
  - 5 est un nombre inférieur à 10 ET 5 est un nombre pair ≡ **($P \wedge Q$) est Fausse**
  - 5 est un nombre inférieur à 10 OU 5 est un nombre pair ≡ **($P \vee Q$) est Vraie**
  - Si 5 est un nombre inférieur à 10 ALORS 5 est un nombre pair ≡ **($P \rightarrow Q$) est Fausse**