

Chapitre I

Aperçu général des géo-matériaux et leurs rhéologies

1.1 Introduction

La rhéologie, mot inventé par Bingham en 1929 à partir d'un verbe grec qui veut dire couler (voir l'historique sur la figure 1), est l'étude des écoulements et des déformations.

Devant l'impuissance de la théorie d'élasticité et de la mécanique des fluides (théories élaborées au 19^{ème} siècle) à décrire et à expliquer les propriétés de matériaux aux comportements mal définis et intermédiaires entre celui du solide élastique parfait (où les contraintes sont proportionnelles aux déformations) et celui du fluide newtonien (où les contraintes sont proportionnelles aux vitesses de déformation), il est apparu nécessaire d'élaborer cette nouvelle discipline.

Les études expérimentales s'attachent à mesurer les propriétés de l'écoulement des matériaux tandis que les approches théoriques cherchent les équations constitutives reliant contraintes et déformations.

1.2. Rappel de la mécanique des milieux continus

1.2.1 Relations contraintes-déformations

Le concept de milieu continu est une modélisation physique macroscopique issue de l'expérience courante, dans la formulation mathématique classique de ce concept, un système mécanique est représenté par un volume Ω constitué, au niveau différentiel, de particules $d\Omega$.

Résoudre un problème d'élasticité c'est :

- 1- Déterminer le vecteur déplacement en tout point de la structure, ce qui pour un solide en 3-D représente les 3 inconnues du champ de déplacement noté $u(x)$:

$$u = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (1.1)$$

- 2- Déterminer le tenseur de déformations en tout point de la structure, ce qui donne les 6 inconnues du champ des déformations noté $\hat{\epsilon}(x)$:

$$[\varepsilon(x)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

- 3- Déterminer le tenseur de déformations en tout point de la structure, ce qui donne les 6 inconnues du champ des déformations noté $\hat{\varepsilon}(x)$:

$$[\sigma(x)] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

- ❑ Ce qui nous fait un total de 15 inconnues à déterminer. Cette analyse se fait grâce aux équations de base de la théorie de l'élasticité linéaire dans le cadre des petites déformations.
- ❑ Ces équations proviennent de différentes relations que sont celles qui lient les déformations aux déplacements ainsi que les relations contraintes-déformations ; nous avons:
- ❑ Les relations de compatibilité qui lient les déplacements (3 composantes) et les déformations (6 composantes) :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.5)$$

- ❑ La loi de comportement ou loi de Hooke qui lie le tenseur de contraintes au tenseur des déformations, elle s'écrit sous la forme :

$$\sigma = H (\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0 \quad (1.6)$$

- ❑ Où σ et ε sont respectivement le tenseur de contraintes et de déformations et H est la matrice qui définit le comportement du solide et dépend du milieu, pour un milieu homogène isotrope, elle s'écrit sous la forme :

$$H = \begin{bmatrix} H_\sigma & 0 \\ 0 & H_T \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Avec

$$\mathbf{H}_\sigma = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_\tau = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$; E : module d'élasticité et ν : coefficient de poisson

Nous avons donc la matrice 6x6 du type :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

□ Les équations d'équilibre pour un solide quelconque s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

□ Ou encore sous forme matricielle :

$$\{div[\sigma]^T\} + \{f_v\} = 0 \quad (1.10)$$

Avec σ_{ij} étant les composantes du tenseurs de contraintes et f_x, f_y, f_z les composantes du vecteur chargement dans un repère cartésien (x, y, z).

Résumé : relations entre (λ, μ) , (E, ν) et (K, G)

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} & \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} & K &= \lambda + \frac{2}{3}\mu & G &= \mu \\ \lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \mu &= G = \frac{E}{2(1+\nu)} & K &= \frac{E}{3(1-2\nu)} \end{aligned}$$

1.2.2 Etats de contraintes et déviateurs

On décompose habituellement le tenseur des contraintes en déviateur et partie sphérique

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + s_{ij} \quad (1.11)$$

où σ est la partie sphérique

$$\sigma = \frac{1}{3} I_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (1.12)$$

et où s_{ij} est le déviateur²

$$\begin{cases} s_{ii} = 0 & s_{ij} = \sigma_{ij} + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \\ s_{12} = \sigma_{12} & s_{11} = \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{3} \end{cases} \quad (1.13)$$

1.2.2.1 Le tenseur déviateur des contraintes

Avant d'introduire le dernier invariant du tenseur contrainte communément utilisé en mécanique du solide, nous considérons le tenseur déviateur des contraintes $\underline{\underline{s}}$. Le tenseur déviateur des contraintes $\underline{\underline{s}}$ est défini comme suit :

$$\begin{cases} \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m \underline{\underline{I}} \\ \sigma_m = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})}{3} = -p \end{cases} \quad (1.14)$$

où σ_m est la contrainte moyenne et $\underline{\underline{I}}$ la matrice identité. Le tenseur déviateur des contraintes $\underline{\underline{s}}$ s'écrit donc :

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m \underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Exprimons $\underline{\underline{s}}$ en fonction des valeurs propres du tenseur contrainte :

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m \underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} - \frac{(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

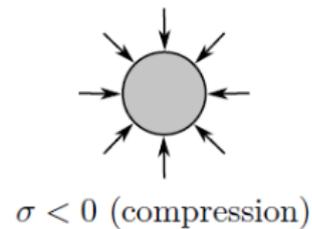
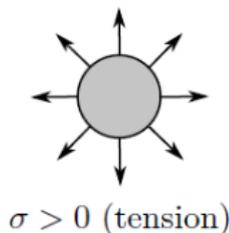
$$\underline{\underline{s}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2\sigma_I - (\sigma_{II} + \sigma_{III}) & 0 & 0 \\ 0 & 2\sigma_{II} - (\sigma_I + \sigma_{III}) & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_{III} - (\sigma_I + \sigma_{II}) \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

1.2.2.2 Etat de tension ou compression hydrostatique

Les trois contraintes principales sont égales, le déviateur est nul, et toutes les directions sont principales, soit :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

qui représente un état de tension si $\sigma > 0$ et un état de compression si $\sigma < 0$. Sur toute facette s'exerce donc une contrainte purement normale.



C'est l'état de contraintes qui existe dans les fluides à l'équilibre, d'où la terminologie *hydrostatique*.

avec $\sigma = -P$ si P est la pression hydrostatique

1.2.2.3 Etat de contrainte de révolution

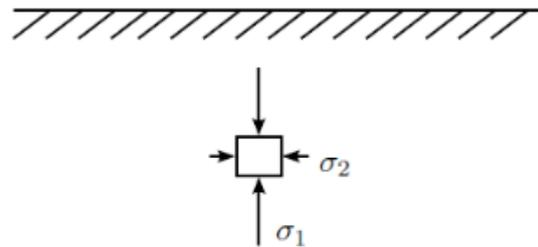
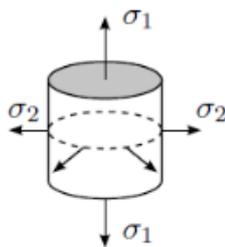
Deux des contraintes principales coïncident ; les directions principales sont :

1. la direction x_1 , pour σ_1 ;
2. toute direction du plan (x_2, x_3) , pour σ_2 .

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

La décomposition en déviateur et partie sphérique devient

$$\sigma = \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ avec } \sigma = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_2}{3} \text{ et } s = \frac{2(\sigma_1 - \sigma_2)}{3} \tag{1.20}$$



(1.21)

C'est l'état de contrainte qui se réalise dans le sol en profondeur.

1.2.2.4 Etat de traction ou compression uniaxiale



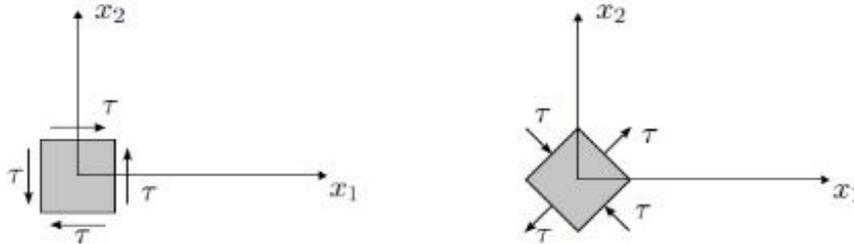
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{traction si } \sigma > 0 \\ \text{compression si } \sigma < 0 \end{matrix} \tag{1.22}$$

C'est un cas particulier du précédent avec $\sigma_2 = 0$ (pas de contrainte latérale). C'est l'état de contrainte le plus facile à réaliser expérimentalement : il suffit d'exercer une force longitudinale sur un barreau (essai de traction).

1.2.2.5 Etat de cisaillement pur

C'est un état de contrainte purement déviatoire. Les directions principales sont l'axe x_3 ($\sigma_3 = 0$) et les bissectrices des axes x_1, x_2 (contraintes principales $+\tau$ et $-\tau$).

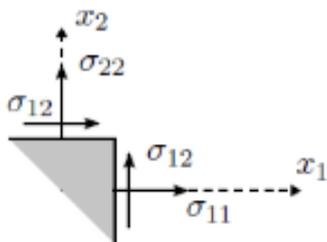
$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$



1.2.2.6 Etat plan de contrainte

Un état de contrainte est dit plan (c'est une hypothèse de modélisation) si une valeur propre est supposée négligeable :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$



Les directions principales sont la direction x_3 et deux directions perpendiculaires du plan x_1, x_2 . Lorsque \vec{n} varie dans le plan (x_1, x_2). Le vecteur contrainte reste dans le plan et il est possible de se limiter au plan (x_1, x_2). Nous ferons l'étude complète au paragraphe 2.3.2.

1.3 Essais mécaniques et lois de comportement

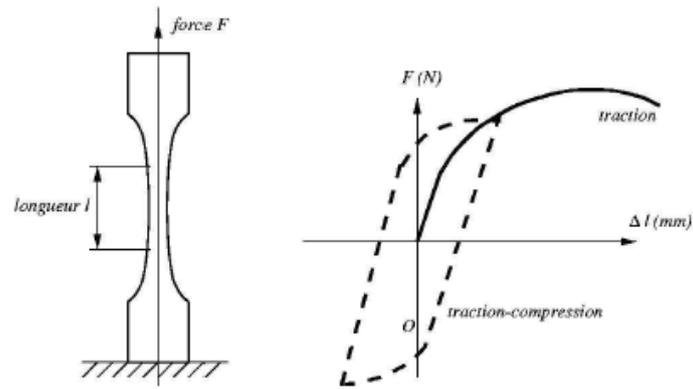
Lors de la réalisation d'essais mécaniques, le choix de la direction de sollicitation peut s'avérer primordial. En effet, il conditionne souvent le domaine de validité de la loi de comportement obtenue.

On peut classer les directions de sollicitation en deux grandes catégories : les sollicitations **uniaxiales** et les sollicitations **multiaxiales**. On parle alors d'essai "uniaxial" ou d'essai "multiaxial".

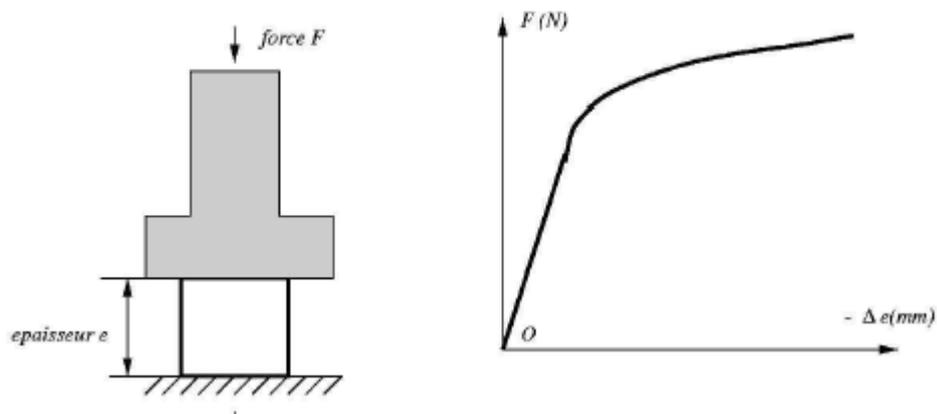
Les principaux essais uniaxiaux utilisés sont (Fig.1.1) :

- la traction-compression
- la torsion
- la flexion

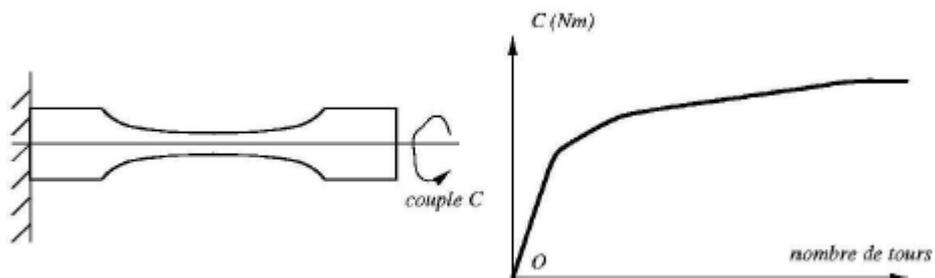
L'essai multiaxial le plus courant est celui de "traction-torsion".



(a) Essai de traction compression



(b) Essai de torsion



(c) Essai de flexion

Figure 1.1- Schématisation des essais mécaniques

1.3.1 Types de sollicitations

1.3.1.1 Essais monotones

Les essais monotones les plus classiques sont ceux de **traction**, de **compression**, de **torsion** et de **flexion**. La sollicitation est alors appliquée au matériau jusqu'à sa rupture (traction, torsion, flexion) ou jusqu'à une déformation suffisamment grande (compression).

En fonction du mode d'application de la sollicitation, on peut réaliser principalement des essais **d'écroutissage, de fluage, ou de relaxation**, et les combiner entre eux (essais d'écroutissage-relaxation, ...). La figure 1.2 montre une courbe « force-allongement » (et la courbe contrainte déformation associée) typique obtenue sur un métal lors d'un essai d'écroutissage en traction monotone. Ce type d'essai est généralement réalisé à des vitesses comprises entre 10^{-3} et $1s^{-1}$. On distingue successivement :

- Un domaine de comportement **élastique réversible**, où l'arrêt de la sollicitation permet à l'éprouvette de retourner dans son état initial, et où les contraintes et les déformations sont reliées linéairement par la **loi de Hooke** ;
- Un domaine de comportement plastique homogène, caractérisé par une déformation irréversible du matériau.
- Un domaine de comportement plastique hétérogène, initié par l'apparition d'une "striction". La déformation se localise dans l'éprouvette jusqu'à rupture de celle-ci.

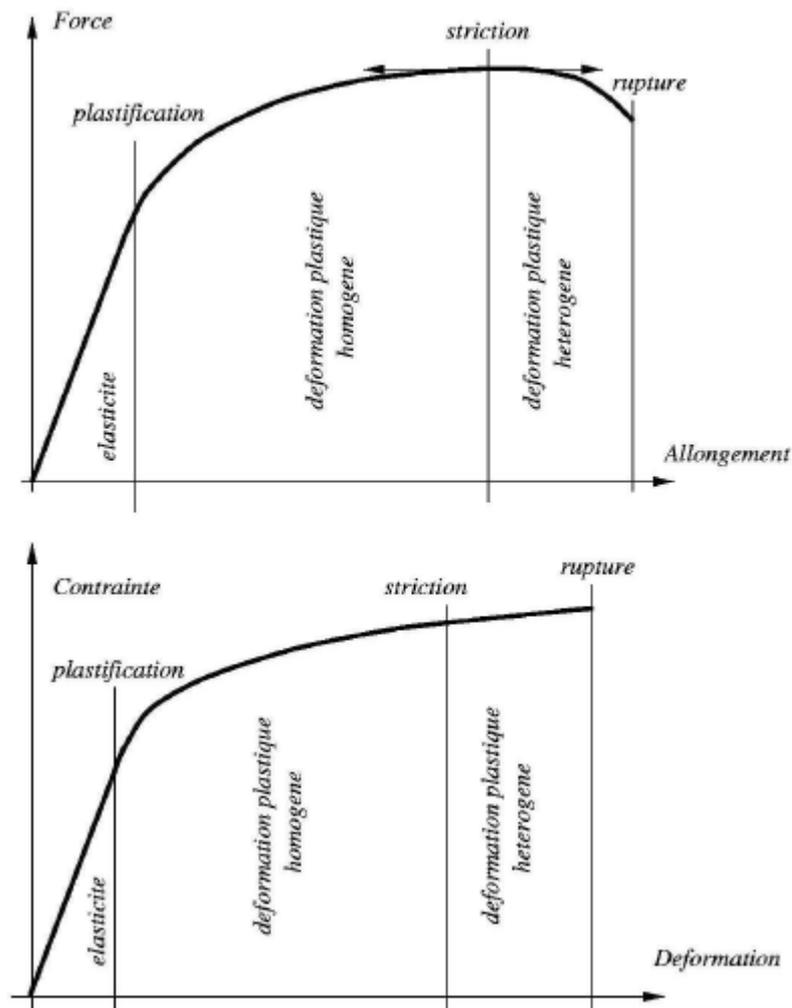


Figure 1.2 – Essai d'écroutissage en traction

Les essais de fluage sont réalisés en appliquant une **contrainte constante** au matériau, en général en traction. Les essais de relaxation servent à caractériser l'évolution au cours du temps des contraintes internes d'un matériau. Pour cela, On applique une **déformation constante** à l'éprouvette, puis on observe l'évolution de la contrainte.

1.3.1.2 Essais cycliques

Les essais cycliques sont caractérisés par une suite de sollicitations alternées. Les plus courants sont ceux de traction-compression, mais on utilise également des essais de flexion ou de torsion alternée. L'objectif de ces essais est d'obtenir la loi de comportement "cyclique" du matériau, qui caractérise son évolution au fur et à mesure des cycles de sollicitation. Les essais de traction compression peuvent être réalisés à déformation ou à contrainte imposée.

1.3.1.3 Dureté et résilience

D'autres essais mécaniques peuvent être utilisés pour caractériser le comportement d'un matériau. Les plus fréquents sont l'essai de dureté, destiné le plus souvent à estimer rapidement et simplement la limite d'élasticité du matériau, et l'essai de résilience visant à caractériser le risque de rupture fragile du matériau.

L'essai de **dureté** est largement utilisé sur les métaux. Il caractérise la résistance qu'oppose le matériau à la pénétration d'un autre corps plus dur que lui. Ainsi, pour des conditions expérimentales données, la dureté du métal sera d'autant plus grande que la pénétration du corps sera faible.

L'essai de **résilience** sur éprouvette entaillée a pour but de caractériser le risque de rupture fragile du matériau. On appelle résilience l'énergie de rupture ramenée ou non à la section sous entaille de l'éprouvette. Elle s'exprime donc en J/cm^2 ou en J. C'est une mesure de la ténacité du matériau, c'est-à-dire de sa capacité globale à absorber de l'énergie.

1.3.2 Quelques lois simples

Le principal objectif des essais mécaniques est la mise en place d'une loi destinée à être utilisée pour la prévision du comportement du matériau.

Une courbe contrainte-déformation ($\sigma - \epsilon$) lors d'un essai d'écroutissage est caractérisée par une partie **élastique** et une partie **plastique**. Nous nous intéressons ici principalement à la partie plastique. Cette courbe sera donc parfois transformée comme décrit sur la **figure 1.3**. La déformation plastique sera notée ϵ_p et la contrainte σ .

Dans le cas d'un essai de traction par exemple, on aura
$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (1.25)$$

où F est la force appliquée, et S la section courante de l'éprouvette.

Et
$$\epsilon_p = \epsilon - \epsilon_e = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) - \frac{\sigma}{E} \tag{1.26}$$

où l est la longueur de la partie utile de l'éprouvette (10 la longueur initiale) et E le module d'Young du matériau.

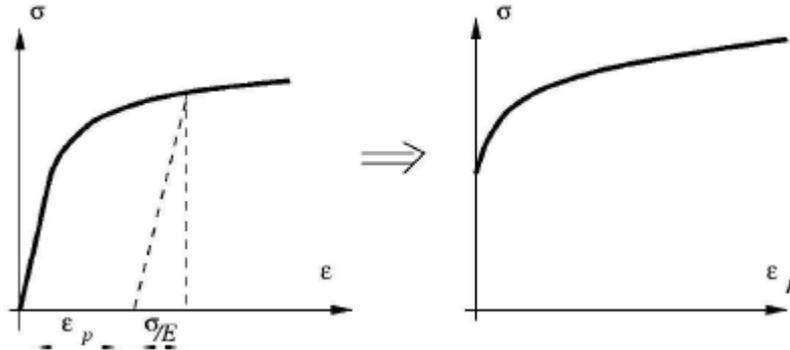


Fig. 1.3 – courbe de traction

En pratique, pour beaucoup de matériaux (dont la plupart des métaux), la partie élastique de la déformation est très faible devant la partie plastique lors d'une opération de mise en forme. Il est donc fréquent, dans une approche phénoménologique, de négliger ϵ_e , et donc de confondre ϵ et ϵ_p .

Les principales lois de comportement phénoménologiques utilisées sont les suivantes :

– la loi de Hollomon ou loi puissance, décrite sur la figure 1.4, où la contrainte est donnée sous la forme (K et n sont deux paramètres) :

$$\sigma = K\epsilon^n \tag{1.27}$$



Figure 1.4- Loi de Hollomon

– la loi de Ludwik, d'écrite sur la figure 1.5, qui a la forme (σ_e , K et n sont des paramètres) :

$$\sigma = \sigma_e + K\epsilon^n \tag{1.28}$$

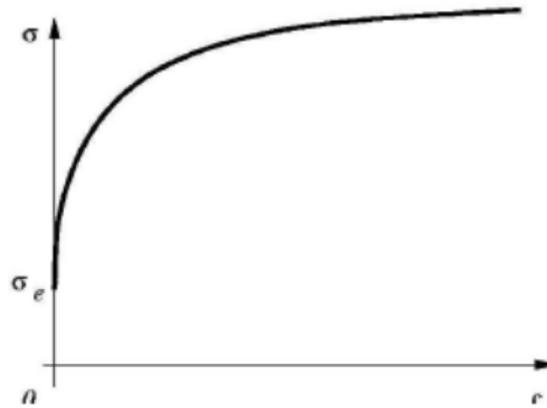


Figure 1.5- Loi de Ludwik

– la loi de Swift ou loi de Krupkowski, représentée sur la figure 1.6, qui s'écrit (K , ϵ_0 et n sont des paramètres) :

$$\sigma = K(\epsilon_0 + \epsilon)^n \quad (1.29)$$

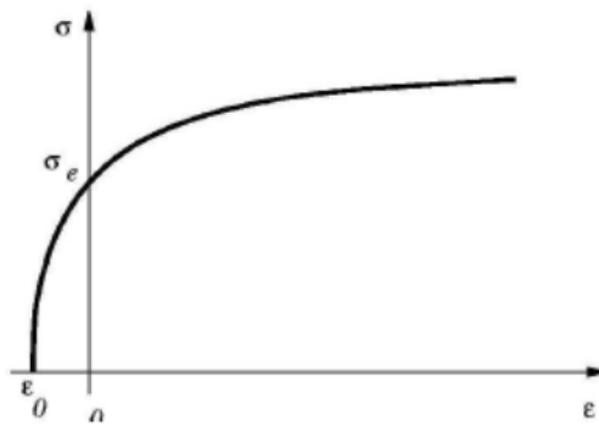


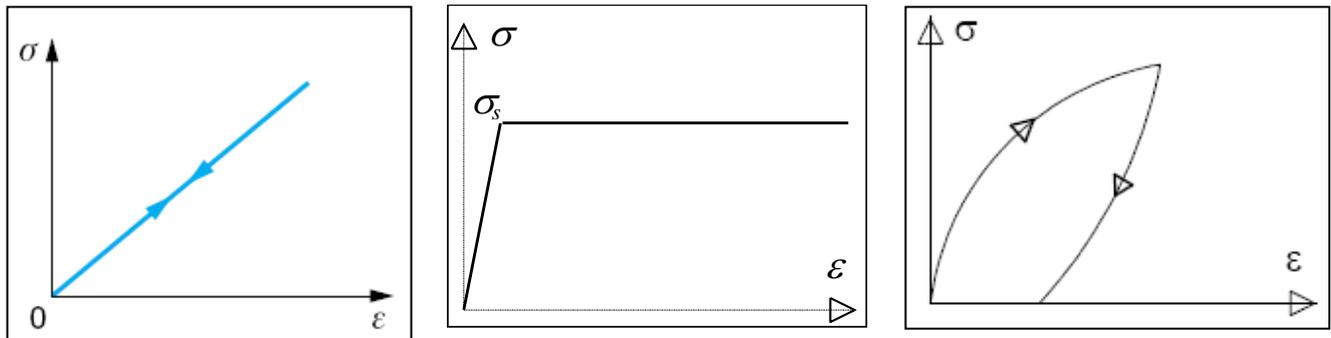
Figure 1.6- Loi de Swift

1.4 Comportement rhéologique des géo-matériaux

1.4.1. Comportement simple

Pour un corps simple, la **rhéologie** distingue trois types de comportements rhéologiques, c'est à dire les manières dont les déformations correspondent aux contraintes qui lui sont appliquées :

- Elastique linéaire
- Rigide-parfaitement plastique
- Fluide visqueux



(a) Elastique linéaire

(b) Rigide parfaitement plastique

(c) Fluide visqueux

Figure 1.7- Comportements rhéologiques des géo-matériaux

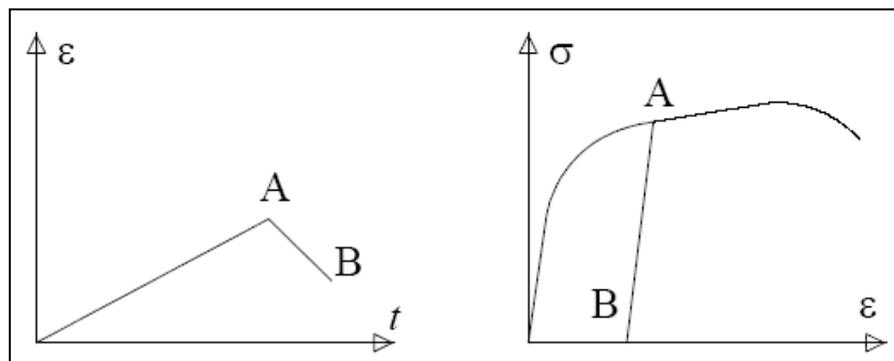
1.4.2. Comportement réel

L'allure qualitative de la réponse des matériaux aux essais caractéristiques (écrouissage, fluage, relaxation) permet de les classer à l'aide des qualificatifs :

- Rigide,
- Elastique,
- Visqueux plastique et
- Parfaitement plastique.

A chaque schéma type correspond une théorie mathématique :

- Dans **l'essai d'écrouissage** en traction ou compression simples, la vitesse de déformation est constante (Fig.1.8). C'est l'essai le plus couramment utilisé.

*Figure 1.8- Essai d'écrouissage*

- Dans **l'essai de fluage** en traction ou compression simples, on étudie le comportement de l'éprouvette lorsque la contrainte appliquée est maintenue constante (Fig.1.9). L'évolution de la déformation permet de caractériser le durcissement et la viscosité du matériau.

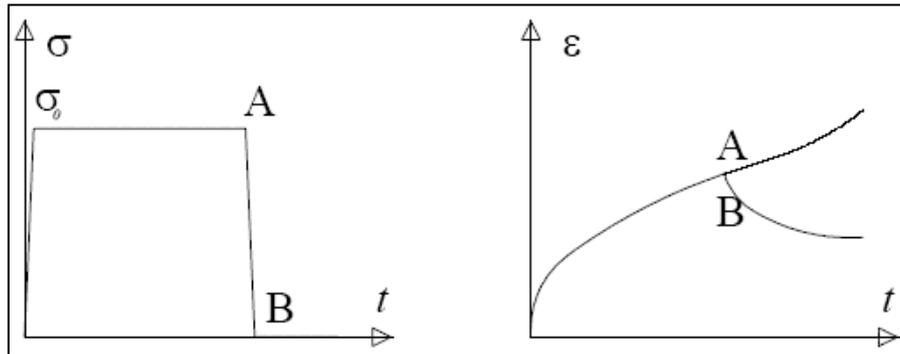


Figure 1.9- Essai de fluage

- Dans l'**essai de relaxation** en traction ou compression simples, on étudie l'évolution des contraintes en imposant une déformation constante (Fig.1.10).

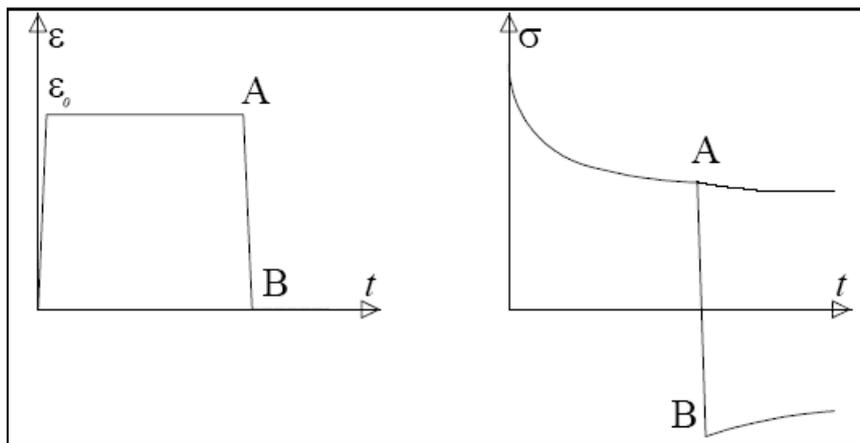


Figure 1.10- Essai de relaxation

- Les **essais de rupture** sont en fait les essais précédents poussés jusqu'à la ruine totale de l'éprouvette. Ils peuvent être combinés avec des sollicitations cycliques.

Enfin, du fait que la loi de comportement d'un matériau ne peut se borner à une simple relation entre une seule contrainte, une seule déformation et le temps, il devient de plus en plus nécessaire de réaliser des essais multidimensionnels ou multiaxiaux.

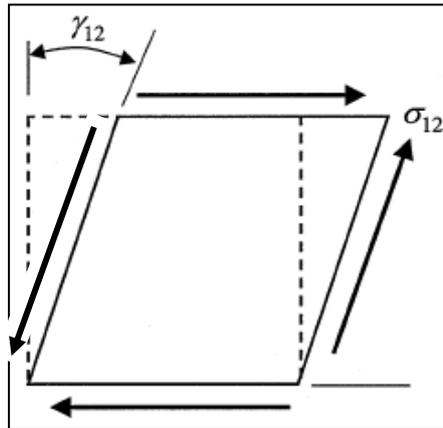
1.5 Théorie unidimensionnelle des modèles analogiques

Considérons un état de contrainte de cisaillement simple appliqué à un matériau cubique.

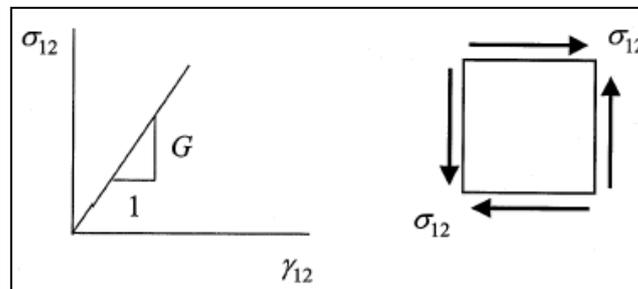
- ☐ Le matériau obéit à la loi de Hooke isotropique :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (1.30)$$

$$\sigma_{12} = G \gamma_{12}$$



Dont la représentation graphique est :



L'expression :

$$\sigma_{12} = G \gamma_{12}$$

Est similaire à :

$$F = k \delta$$

D'où, l'adoption du ressort linéaire comme modèle analogique du comportement élastique simple (Fig.1.11).

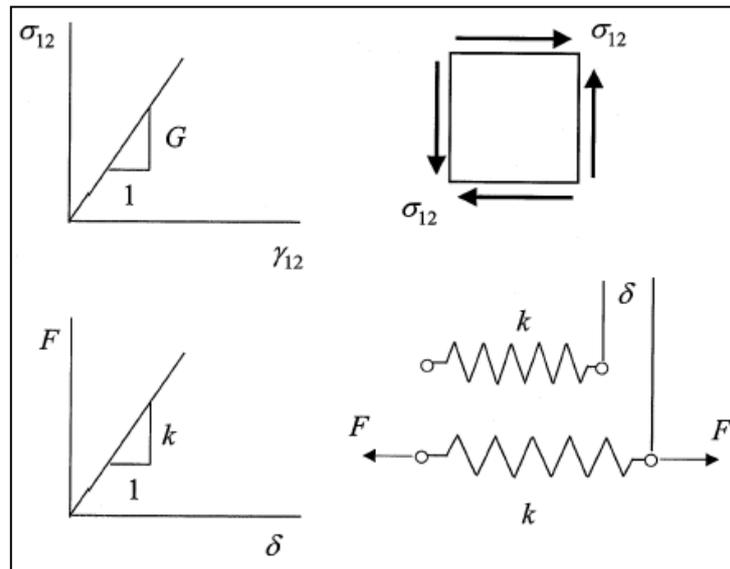


Figure 1.11- Modèle analogique du comportement élastique simple.

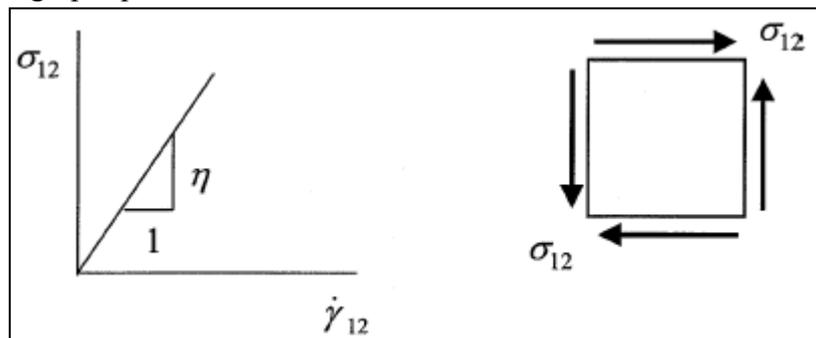
□ Considérons maintenant que la réponse du cube est un écoulement visqueux :

$$\sigma_{12} = \mu^* \dot{\gamma}_{12}$$

Où μ^* est le coefficient de viscosité, noté dans la littérature par η .

$$\sigma_{12} = \eta \dot{\gamma}_{12}$$

Dont la représentation graphique est :



L'expression :

$$\sigma_{12} = \eta \dot{\gamma}_{12}$$

Est similaire à :

$$F = \eta \dot{\delta}$$

D'où, l'adoption de l'amortisseur comme modèle analogique du comportement viscoélastique linéaire (Fig.1.12).

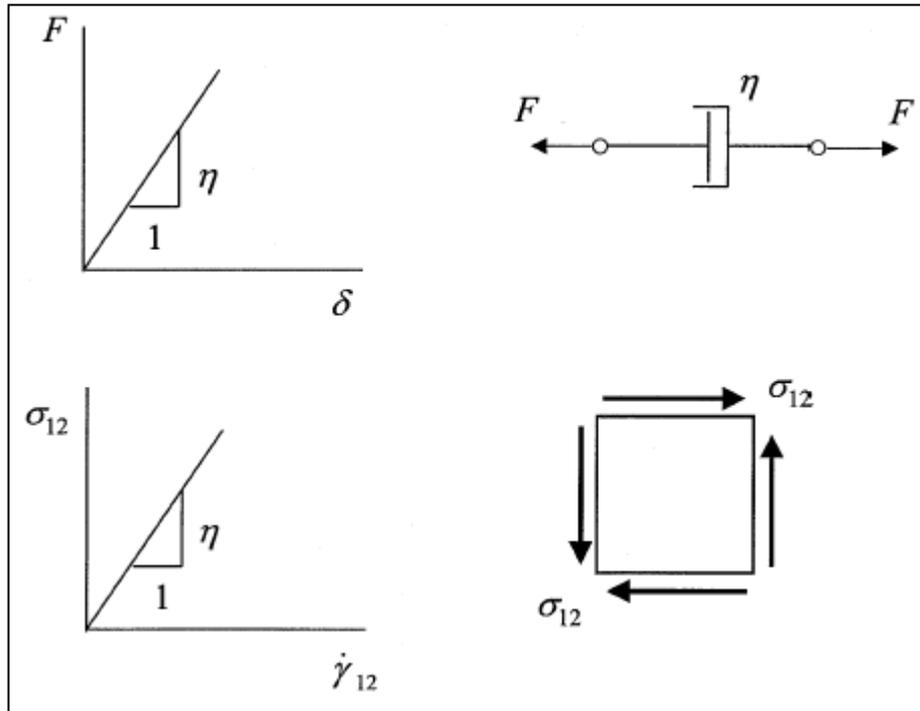


Figure 1.12- Modèle analogique du comportement viscoélastique linéaire.

1.6 Modèles analogiques

Les modèles analogiques sont des groupements d'éléments mécaniques dont les réponses à des sollicitations sont similaires à celles des matériaux. Ils sont souvent utilisés à des fins didactiques, pour donner une image concrète des équations de comportement. L'analogie se limite là et ne porte en aucun cas sur les mécanismes physiques eux même.

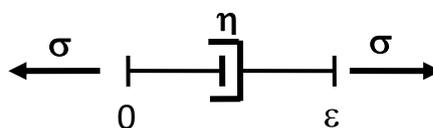
Les éléments les plus utilisés sont les suivants :

- Le ressort qui schématise l'élasticité linéaire :



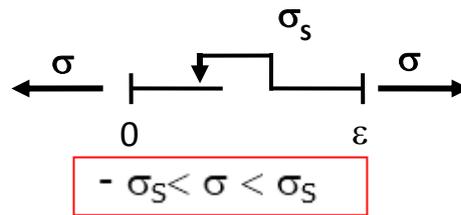
$$\sigma = E \varepsilon$$

- L'amortisseur qui schématise la viscosité linéaire ou non :



$$\sigma = \eta \dot{\epsilon}$$

➤ Le patin qui schématise un seuil de contrainte :



Ces différents éléments (indice i) peuvent être associés en série ou en parallèle

1.6.1 Modèle de Kelvin-Voigt

Il est possible d'envisager un modèle plus complet en associant en parallèle un ressort ayant un module d'élasticité E (ou G) et un amortisseur ayant un coefficient d'amortissement η.

On définit ainsi le modèle de *Kelvin-Voigt* (Fig.1.13).

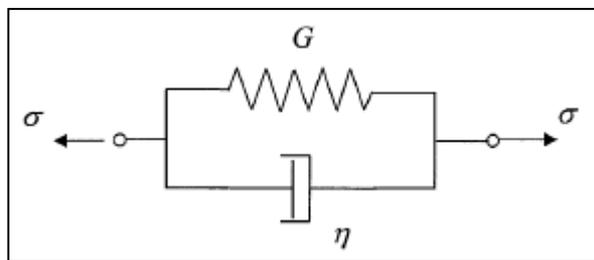


Figure 1.13- Modèle analogique de Kelvin-Voigt.

On peut également parler des modèles de Kelvin-Voigt généralisé (Fig.1.14)

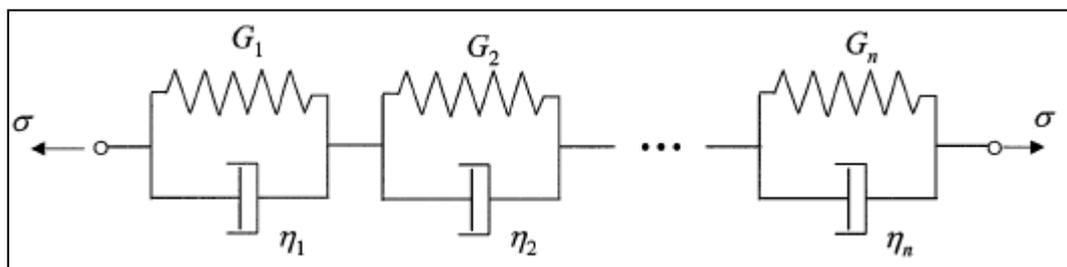


Figure 1.14- Modèle analogique de Kelvin-Voigt généralisé.

Pour un corps visqueux, il y a écoulement pour toute valeur de contrainte : $d\epsilon = f(\sigma)$.

1.6.2 Modèle de Maxwell

Un modèle analogique simple est le modèle de *Maxwell* constitué d'un ressort ayant un module d'élasticité E (ou G) et d'un amortisseur ayant un coefficient d'amortissement η, linéaires en série (Fig.1.15).

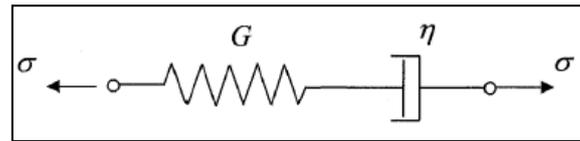


Figure 1.15- Modèle analogique de Maxwell.

On peut également parler des modèles de Maxwell généralisé (Fig.1.14).

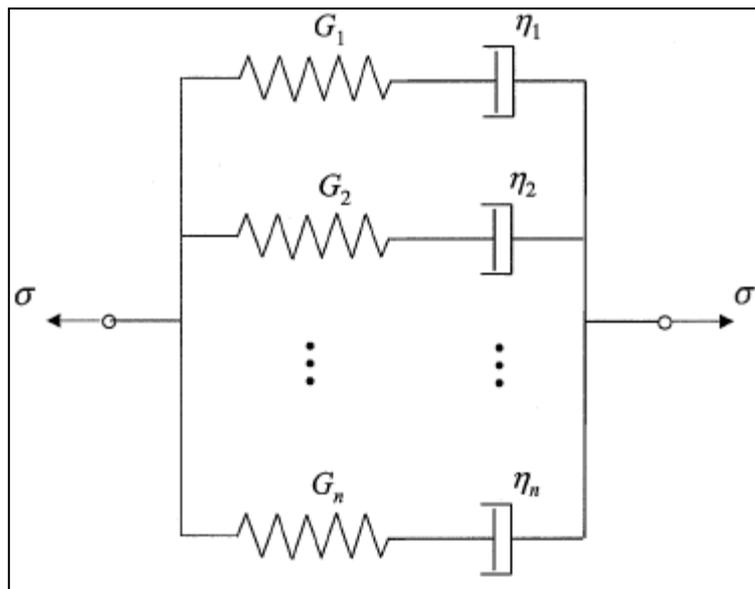
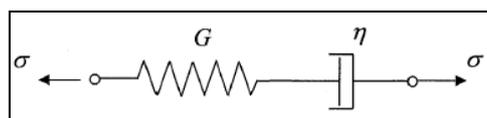


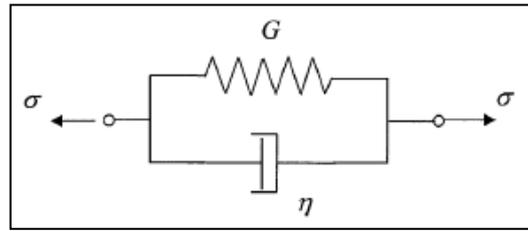
Figure 1.14- Modèle analogique de Maxwell généralisé.

Application

- Déterminer les équations constitutives du modèle de Maxwell et de Kelvin-Voigt.



Modèle de Maxwell



Modèle de Kelvin-Voigt

✚ Solution

- 1- Les équations constitutives du modèle de *Maxwell* (ressort + amortisseur en série)
- Equation de la contrainte σ

$$\sigma = \sigma_e = \sigma_v \quad (1)$$

Avec : σ_e est la contrainte appliquée au ressort (comportement élastique)

$$\sigma_e = G \cdot \varepsilon_e \quad (2)$$

σ_v est la contrainte appliquée à l'amortisseur (comportement visqueux)

$$\sigma_v = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_v \quad (3)$$

- Equation de la déformation ε

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v \quad (4)$$

Avec : ε_e est la déformation du ressort (comportement élastique)

ε_v est la déformation de l'amortisseur (comportement visqueux)

Nous avons : $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v \implies \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_v$

$$\left. \begin{array}{l} \text{De (2)} \implies \dot{\varepsilon}_e = \frac{\dot{\sigma}_e}{G} \\ \text{De (3)} \implies \dot{\varepsilon}_v = \frac{\dot{\sigma}_v}{\eta} \\ \text{De (1)} \implies \sigma_e = \sigma_v = \sigma \end{array} \right\} \implies \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_e}{G} + \frac{\dot{\sigma}_v}{\eta}$$

D'où ;

$$\int \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt = \frac{1}{G} \int \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt + \frac{1}{\eta} \int \sigma dt$$

D'où ;

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G} + \frac{\sigma_0}{\eta} t$$

2- Les équations constitutives du modèle de *Kelvin-Voigt* (ressort + amortisseur en parallèle)- Equation de la contrainte σ

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v = G\varepsilon_e + \eta \cdot \dot{\varepsilon}_v \quad (5)$$

- Equation de la déformation

$$\varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_v \quad (6)$$

De (5) et (6) $\implies \sigma = G\varepsilon(t) + \eta \cdot \dot{\varepsilon}(t)$

D'où ; $\dot{\varepsilon}(t) + \frac{G}{\eta}\varepsilon(t) - \sigma = 0$

C'est une équation différentielle du 1^{er} ordre de la forme suivante :

$$y'(x) - ay(x) + b = 0$$

Sa solution est :

$$y(x) = ke^{ax-b/a}$$

Par simulation, on a : $y(x)=\varepsilon(t)$; $a=-G/\eta$; $b=-\sigma$

D'où : $\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{G} (1 - e^{-Gt/\eta})$

Références bibliographiques

- E. C. Bingham, Fluidity and Plasticity, McGraw-Hill, New York , 1922.
- François Sidoroff. Mécanique des milieux continus. Engineering school. École Centrale de Lyon, 1980, pp.166.
- M. Reiner, Rhéologie et nombre de Deborah, article de, Physics Today, 1964.
- E. Guazzelli. Rhéologie des fluides complexes. École d'ingénieur. Rhéologie des fluides complexes, France. 2001.
- Z. Harichane, Cours de Magister «Rhéologie des sols », Université Haasiba Benbouali, Chelf, Algérie, 2010.
- R. Fortunier, Comportements Mécaniques des Matériaux, Ecole Nationale Supérieure des Mines, Saint-Etienne, France.