Solutions : Série n02-B : les fonctions analytiques

1. Donner les domaines de définition des fonctions suivantes et calculer les limites aux points indiqués :

$$\lim_{z\to 2i}(z^2-\bar{z}) \quad \lim_{z\to 1+i}\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}} \quad \lim_{z\to 1-i}(|z|^2-i\bar{z}) \quad \lim_{z\to e^{i\pi/4}}(z+1/z) \quad \lim_{z\to 1+i}\frac{z^2+1}{z^2-1}$$

$$\lim_{z\to \pi i}e^z \quad \lim_{z\to i}ze^z \quad \lim_{z\to 2+i}(e^z+z) \quad \lim_{z\to -i}\frac{z^4-1}{z+i}$$

Solution :

$\lim_{z\to 2i}(z^2-\bar{z})$	$D=\mathbb{C}$	$\lim_{z\to 2i}(z^2-\bar{z})=\big((2i)^2-(-2i)\big)=-4+2i$
$\lim_{z\to 1+i}\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}$	$D=\mathbb{C}-\{droite: x=0\}$	$\lim_{z\to 1+i}\frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}}=\frac{(1+i)-(1-i)}{(1+i)+(1-i)}=\frac{+2i}{2}=i$
$\lim_{z\to 1-i}(\lvert z\rvert^2-i\bar{z})$	$D=\mathbb{C}$	$\lim_{z\to 1-i}(\lvert z\rvert^2-i\bar{z})=\big(\lvert 1-i\rvert^2-i(1-i)\big)=1-i$
$\lim_{z\to e^{i\pi/4}}(z+1/z)$	$D=\mathbb{C}-\{z=0\}$	$\lim_{z\to e^{i\pi/4}}(z+1/z)=\big(e^{i\pi/4}+e^{-i\pi/4}\big)=2\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$
$\lim_{z\to 1+i}\frac{z^2+1}{z^2-1}$	$D=\mathbb{C}-\{-1,1\}$	$\lim_{z\to 1+i}\frac{z^2+1}{z^2-1}=\frac{(1+i)^2+1}{(1+i)^2-1}=\frac{1+2i}{-1+2i}=\frac{3-i4}{5}$
$\lim_{z\to \pi i}e^z$	$D=\mathbb{C}$	$\lim_{z\to \pi i}e^z=e^{(i\pi)}=-1$
$\lim_{z\to i}ze^z$	$D=\mathbb{C}$	$\lim_{z\to i}ze^z=ie^i=i(\cos 1+i\sin 1)=-0.841+i0.54$
$\lim_{z\to 2+i}(e^z+z)$	$D=\mathbb{C}$	$\lim_{z\to 2+i}(e^z+z)=\big(e^{2+i}+2+i\big)$ $=e^2(0.54+i0.84)+2+i\approx 6+7.20$
$\lim_{z\to -i}\frac{z^4-1}{z+i}$ Forme réductible	$D=\mathbb{C}-\{-i\}; z_0=-i$ Singularité apparente	$\lim_{z\to -i}\frac{z^4-1}{z+i}=\frac{0}{0}\to\lim_{z\to -i}\frac{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}{z+i}$ $=\lim_{z\to -i}(z-1)(z+1)(z-i)=4i$

Définition : singularité apparente

Si une fonction uniforme f n'est pas définie en $z=z_0$ mais si $\lim_{z\to z0}f(z)$ existe ; alors $z=z_0$ est appelée une **singularité apparente**. Dans un pareil cas on définit $f(z)$ pour $z=z_0$ comme étant égale à $\lim_{z\to z0}f(z)$.

$$\begin{cases}\lim_{z\to z0}(z-z_0)f(z)=0\\ \lim_{z\to z0}f(z)=L, existe\ et\ finie\end{cases}$$

2. Montrer que la fonction f est continue au point indiqué :

(a) $f(z) = z^2 - iz + 3 - 2i; z_0 = 2 - i$; (b) $f(z) = z^3 - \frac{1}{z}$; $z_0 = 3i$; (c) $f(z) = \frac{z^3}{z^3+3z^2+z}$; $z_0 = i$

(d) $f(z) = \frac{Re(z)}{z+iz}; z_0 = e^{i\pi/4}$

Solution:

(a) $f(z) = z^2 - iz + 3 - 2i; z_0 = 2 - i \rightarrow f(2-i) = 7 - 6i = \lim_{z\to 2-i} f(z)$

(b) $f(z) = z^3 - \frac{1}{z};\ z_0 = 3i \rightarrow f(3i) = -27i + \frac{i}{3} = -i\frac{80}{3} = \lim_{z\to 3i} f(z)$

(c) $f(z) = \frac{z^3}{z^3+3z^2+z}; z_0 = i \rightarrow f(i) = \frac{-i}{-i-3+i} = \frac{i}{3} = \lim_{z\to i} f(z)$

(d) $f(z) = \frac{Re(z)}{z+iz}; z_0 = e^{i\pi/4} \rightarrow f\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right) = \frac{\sqrt{2}/_2}{\sqrt{2}/_2 + i\sqrt{2}/_2 + i\sqrt{2}/_2 - \sqrt{2}/_2} = \frac{-i}{2} = \lim_{z\to e^{\frac{i\pi}{4}}} f(z)$

3. Montrer que la fonction f n'est pas continue au point indiqué:

(a) $f(z) = \frac{z^2+1}{z+i}; z_0 = -i$; (b) $f(z) = \frac{1}{|z|-1};\ z_0 = i$

Solution:

(a) $f(z) = \frac{z^2+1}{z+i}; z_0 = -i \rightarrow \lim_{z\to -i} f(z) = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{z\to -i} \frac{(z+i)(z-i)}{z+i} = \lim_{z\to -i}(z-i) = -2i \neq f(-i)$ n'est pas définie

(b) $f(z) = \frac{1}{|z|-1};\ z_0 = i \rightarrow \lim_{z\to i} f(z) = \frac{1}{0} = \infty$: n'existe pas

4. En utilisant la définition de la dérivée d'une fonction, calculer $f'(z)$:

(a) $f(z) = 9iz + 2 - 3i$; (b) $f(z) = iz^3 - 7z^2$; (c) $f(z) = z - \frac{1}{z}$;

(d) $f(z) = \frac{1}{z}$; (e) $f(z) = z^3$

- Utiliser les règles de la dérivation pour calculer $f'(z)$:

(a) $f(z) = (2-i)z^5 + iz^4 - 3z^2 + i^6$

(b) $f(z) = (z^6 - 1)(z^2 - z + 1 - 5i)$

(c) $f(z) = -5iz^2 + \frac{2+i}{z^2}$

Solution:

(a) $f(z) = 9iz + 2 - 3i \rightarrow f'(z) = 9i$; (b) $f(z) = iz^3 - 7z^2 \rightarrow f'(z) = 3iz^2 - 14z$;

(c) $f(z) = z - \frac{1}{z} \rightarrow f'(z) = 1 + \frac{1}{z^2}$; (d) $f(z) = \frac{1}{z} \rightarrow f'(z) = -\frac{1}{z^2}$; (e) $f(z) = z^3 \rightarrow f'(z) = 3z^2$

5. Utiliser la règle de l'Hôpital pour calculer les limites suivantes :

$$\lim_{z\to i} \frac{z^7 + i}{z^{14} + 1} \qquad \lim_{z\to \sqrt{2}+i\sqrt{2}} \frac{z^4 + 16}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 4} \qquad \lim_{z\to 1+i} \frac{z^5 + 4z}{z^2 - 2z + 2}$$

Solution :

$$\lim_{z\to i} \frac{z^7 + i}{z^{14} + 1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{z\to i} \frac{z^7 + i}{z^{14} + 1} = \frac{7(i)^6}{14(i)^{13}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{i^7} = \frac{i}{2}$$

$$\lim_{z\to\sqrt{2}+i\sqrt{2}} \frac{z^4+16}{z^2-2\sqrt{2}z+4} = \frac{0}{0} \to \lim_{z\to\sqrt{2}+i\sqrt{2}} \frac{z^4+16}{z^2-2\sqrt{2}z+4} = \frac{4\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^3}{2\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)-2\sqrt{2}} = 8+i8$$

$$\lim_{z\to 1+i} \frac{z^5+4z}{z^2-2z+2} = \frac{0}{0} \to \lim_{z\to 1+i} \frac{z^5+4z}{z^2-2z+2} = \frac{5(1+i)^4+4}{2(1+i)-2} = \frac{-16}{2i} = i8$$

6. Quelles sont les fonctions qui vérifient les équations C-R ? conclure

(a) $f(z) = z^3$; (b) $f(z) = 3z^2+5z-6i$; (c) $f(z) = Re(z)$;

(d) $f(z) = 4z-6\bar{z}+3$; (e) $f(z) = x^2+y^2$; (f) $f(z) = \frac{\cos\theta}{r} - i\frac{\sin\theta}{r}$;

Rappel: Equations CR en coordonnées polaires:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta};\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

Solution:

(a) $f(z) = z^3 = r^3e^{i3\theta} = \underbrace{r^3\cos 3\theta}_{u(r,\theta)} + i\underbrace{r^3\sin 3\theta}_{v(r,\theta)} \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = 3r^2\cos 3\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\ et\ \frac{\partial v}{\partial r} = 3r^2\sin 3\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$;

7. Vérifier que la fonction $u(x,y)$ est harmonique. Trouver sa fonction harmonique conjuguée :

(a) $u(x,y) = x$; (b) $u(x,y) = 2x-2xy$; (c) $u(x,y) = x^2-y^2$;

(d) $u(x,y) = \log(x^2+y^2)$; (e) $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin x)$;

(f) $u(x,y) = -e^x\sin y$;

Solution:

(c) $u(x,y) = 2x-2xy \to \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0+0 = 0 \to u(x,y)\text{: }harmonique \to \text{équations } C-R$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2-2y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \to v(x,y) = 2y-y^2+h(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2x = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \to v(x,y) = x^2+g(y) \end{cases} \to v(x,y) = x^2+2y-y^2$$