Série n01 : Le plan complexe
Solutions des exercices

1. résoudre les équations suivantes, pour tout $z = a + ib$:

$2z = i(2+i9)$; $z^2 = i$; $z - 2\bar{z} + 7 - i6 = 0$; $z + 2\bar{z} = \frac{2-i}{1+i3}$

$$2z = i(2+i9) \Leftrightarrow 2a + 2ib = 2i - 9$$
$$\Rightarrow a = -\frac{9}{2}; b = \frac{1}{2}$$

$$z^2 = i \Rightarrow a^2 - b^2 + 2iab = 0 + i$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow 2a^2 = 1$$
$$\Rightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} :$$
$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}; z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z - 2\bar{z} + 7 - i6 = 0$$
$$\Leftrightarrow a + ib - 2a + 2ib + 7 - i6 = 0$$
$$\Rightarrow (-a+7) + i(3b-6) = 0 \Rightarrow a = 7; b = 2$$
;

$$z + 2\bar{z} = \frac{2-i}{1+i3} \Leftrightarrow 3a - ib = \frac{-1-i7}{10} \Rightarrow$$
$$a = \frac{-1}{30}; b = \frac{7}{10}$$

2. Trouver la limite supérieure pour $\left|\frac{-1}{z^4 - 5z + 1}\right|$ si $|z| = 2$.

$$\left|\frac{-1}{z^4 - 5z + 1}\right| \leq M \Leftrightarrow \frac{1}{|z^4 - 5z + 1|} \leq M$$
$$|z^4 - 5z + 1| = |z^4 - (5z-1)| \geq \left||z^4| - |5z-1|\right|$$
$$sachant\_que :$$
$$|5z - 1| \leq |5z| + |-1| = 5|z| + 1; |z| = 2$$
$$|z^4 - (5z-1)| \geq \left||z^4| - |(5z-1)|\right| \geq \left||z^4| - (5|z|+1)\right|$$
$$= \left||z^4| - 5|z| - 1\right| = \left||2^4| - 5|2| - 1\right| = 5$$
$$\left|\frac{-1}{z^4 - 5z + 1}\right| \leq \frac{1}{5}$$

3. Trouver la limite supérieure pour le module de $3z^2 + 2z + 1$ si $|z| \leq 1$.

$$|3z^2 + 2z + 1| \leq |3z^2| + |2z + 1| \leq |3z^2| + |2z| + |1|$$
$$|3z^2 + 2z + 1| \leq 3|z^2| + 2|z| + 1 = 6$$

4. Vérifier les inégalités suivantes :

(a) $|z + 6 + i8| \leq 13, si\ |z| = 2$

(b) $1 \leq |z^2 - 3| \leq 4, si\ |z| = 1$

5. Quel est le nombre z qui vérifie l'équation suivante :

a) $|z| - z = 2 + i$; b) $|z|^2 + 1 + i12 = 6z$

$$|z| - z = 2 + i \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} - a - ib = 2 + i$$
$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + ib + 2 + i \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + 2 + i(b+1) \Rightarrow b + 1 = 0$$
$$\Rightarrow b = -1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 1} = a + 2$$
$$\Leftrightarrow a^2 + 1 = a^2 + 4a + 4 \Rightarrow a = -3/4$$
$$z = -3/4 - i$$
;

$$|z|^2 + 1 + i12 = 6z \Leftrightarrow |z|^2 = 6z - 1 - i12 \Rightarrow$$
$$a^2 + b^2 = 6a - 1 + i(6b - 12) \Rightarrow 6b - 12 = 0 \Rightarrow$$
$$b = +2; a^2 - 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(a-5) = 0$$
$$a_1 = 1 \Rightarrow z_1 = 1 + i2$$
$$a_2 = 5 \Rightarrow z_2 = 5 + i2$$

6. (a) Trouver la racine cubique de *z=i.* ;

(b) Trouver la racine d'ordre 4 de *z=1+i*

On utilise la formule de la nième racine d'un nombre complexe notée w_n :

$$w_n = \sqrt[n]{r}\left(cos\left[\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right] + i\,sin\left[\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right]\right)$$

K=0,1,…n-1

$$i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$w_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$w_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$w_3 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = -i$$

(b) Trouver la racine d'ordre 4 de $z=1+i$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{z} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right);$$

$$\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right);$$

$$\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right);$$

$$\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right)$$

7. (a) Vérifiez que : $(4+i3)^2 = 7+i24$;
(b) En utilisant le résultat précédent, trouver les valeurs de $(7+i24)^{1/2}$.

$$(4+i3)^2 = (16-9+24i) = 7+i24$$

$$(7+i24)^{1/2} = (4+i3);(-4-i3)$$

8. Trouver la n-ième racine des nombres complexe suivants :

$(8)^{1/3}$; $(-1)^{1/4}$; $(i)^{1/2}$; $(-1+i)^{1/3}$; $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{1/6}$.

$$(8)^{1/3} = 2;2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right);$$

$$2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$(-1)^{1/4} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$;\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right);\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$(i)^{1/2} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$(-1+i)^{1/3} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right)^{1/3} =$$

$$2^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);2^{1/6}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right);$$

$$2^{1/6}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{1/6} = \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^{1/6} = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{2}}\right)^{1/6} =$$

$$\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{\pi}{72} + i\sin\frac{\pi}{72}\right);$$

$$\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{25\pi}{72} + i\sin\frac{25\pi}{72}\right);$$

$$\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{49\pi}{72} + i\sin\frac{49\pi}{72}\right);$$

$$\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{73\pi}{72} + i\sin\frac{73\pi}{72}\right);$$

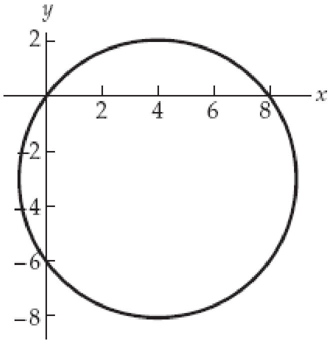
$$\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{97\pi}{72} + i\sin\frac{97\pi}{72}\right);$$

$$\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{109\pi}{72} + i\sin\frac{109\pi}{72}\right)$$

9. Donner les nombres complexes suivants dans la forme exponentielle :
(a) -10 ; (b) $-2\pi i$; (c) $-4-i4$; (d) $\frac{2}{1+i}$;
(e) $(3-i)^2$; (f) $(1+i)^{20}$

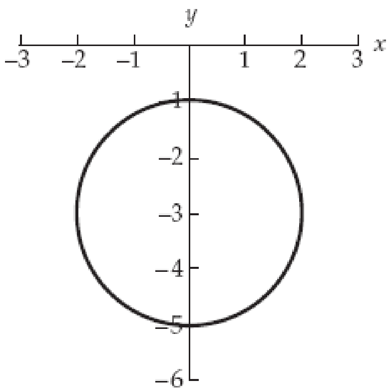
10. Tracez graphiquement l'équation suivante :
a) $|z-4+i3| = 5$; b) $|z+i3| = 2$;
c) $|z+2+i2| = 2$; d) $Re(z) = 5$;
e) $Im(z) = -2$

$$|z-4+i3|=5 \Leftrightarrow |a-4+i(b+3)|=5 \Rightarrow \sqrt{(a-4)^2+(b+3)^2}=5$$



Circle centered at $4-3i$ of radius 5

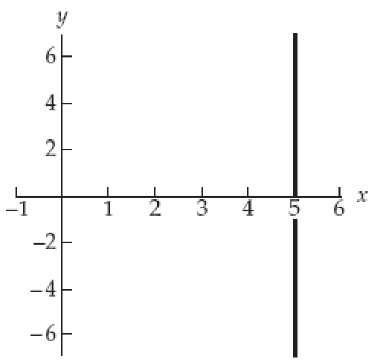
$$|z+i3|=2 \Leftrightarrow |a+i(b+3)|=2 \Rightarrow \sqrt{a^2+(b+3)^2}=2$$



Circle centered at $-3i$ of radius 2

$$|z+2+i2|=2 \Leftrightarrow |a+2+i(b+2)|=2 \Rightarrow \sqrt{(a+2)^2+(b+2)^2}=2$$

$$Re(z)=5 \Rightarrow a=5;\forall b \in \Re$$



Verticle line $x=5$

$$Im(z)=-2 \Rightarrow b=-2;\forall a \in \Re$$

La ligne horizontale parallèle à l'axe des réels, passant par le point -2.

11. Tracez l'ensemble des points S dans le plan complexe, satisfaisant l'inégalité suivante et déterminer si cet ensemble est : a) ouvert, b) fermé, c) un domaine, d) limité ou e) connexe.

$Re(z)<-1$; $Im(z)>3$; $2<Re(z-1)<4$; $Re(z^2)>0$; $|z-i|>1$; $1\le|z-1-i|<2$

12. Trouver les racines des équations quadratiques suivantes :

a) $z^2+i.z-2=0$

b) $z^2-(1+i)z+6-i17=0$

c) $z^2+2z-i\sqrt{3}=0$

d) $iz^2-z+i=0$

e) $z^2-(1+i9)z-20+i5=0$