Rappel sur les nombres complexes

On définit le nombre imaginaire i tel que : $i^2 = -1$. Le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ est défini par les couplets :

$\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{C}: (x, y) \to z = x + iy$

$x \in \mathbb{R}\ et\ y \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}$

1. Simplifier les nombres complexes suivants sous la forme *a+ib :*

$2i^3 - 3i^2 + 5i$:

$$\boxed{2i^3 - 3i^2 + 5i = 2i(-1) - 3(-1) + 5i = 3 + i3}$$

$3i^5 - i^4 + 7i^3 - 10i^2 - 9$:

$$\boxed{\begin{aligned}&3i^5 - i^4 + 7i^3 - 10i^2 - 9 = 3i - 1 - 7i + 10\\ &= -i4\end{aligned}}$$

$\frac{5}{i} + \frac{2}{i^3} - \frac{20}{i^{18}}$:

$$\boxed{\frac{5}{i} + \frac{2}{i^3} - \frac{20}{i^{18}} = -i5 + i2 + 20 = 20 - i3}$$

$2i^2 + \left(\frac{2}{-i}\right)^3 + 5i^{-6} - 12i$:

$$\boxed{\begin{aligned}&2i^2 + \left(\frac{2}{-i}\right)^3 + 5i^{-6} - 12i = -2 - 8i - 5\\ &= -7 - i8\end{aligned}}$$

2. Simplifier ce qui suit ; sous la forme $a+ib$:

a) $i(5 + i7)$:

$$\boxed{i(5 + i7) = -7 + i5}$$

b) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3} + i\frac{5}{3}\right)$:

$$\boxed{\left(\frac{1}{2} - i\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3} + i\frac{5}{3}\right) = \frac{9}{12} + i\frac{8}{12} = \frac{3}{4} + i\frac{2}{3}}$$

c) $3i + \frac{1}{2 - i}$:

$$\boxed{3i + \frac{1}{2 - i} = 3i + \frac{2 + i}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2}{5} + i\frac{16}{5}}$$

d) $\frac{10 - i5}{6 + i2}$:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{10 - i5}{6 + i2} = \frac{10 - i5}{6 + i2} \times \frac{6 - i2}{6 - i2} = \frac{50 - i50}{40}\\ &= \frac{5}{4}(1 - i)\end{aligned}}$$

e) $\frac{(5 - i4) - (3 + i7)}{(4 + i2) + (2 - i3)}$:

$$\boxed{\frac{(5 - i4) - (3 + i7)}{(4 + i2) + (2 - i3)} = \frac{2 - i11}{6 - i} = \frac{23 - i64}{37}}$$

f) $\frac{(4 + i5) + 2i^3}{(2 + i)^2}$:

$$\boxed{\frac{(4 + i5) + 2i^3}{(2 + i)^2} = \frac{4 + i3}{3 + i4} = \frac{24 - i7}{25}}$$

g) $(1 + i)^2(1 - i)^3$:

$$\boxed{(1 + i)^2(1 - i)^3 = 4(1 - i)}$$

3. Trouver Re(z) et Im(z) pour les nombres suivants :

$z = \left(\frac{i}{3 - i}\right)\left(\frac{1}{2 + 3i}\right)$:

$$\boxed{\begin{aligned}&z = \left(\frac{i}{3 - i}\right)\left(\frac{1}{2 + 3i}\right) = \frac{i}{9 + i7} = \frac{7 + i9}{130}\\ &= \frac{7}{130} + i\frac{9}{130}\end{aligned}}$$

$z = \frac{1}{(1 + i)(1 - i2)(1 + i3)}$:

$$\boxed{\begin{aligned}&z = \frac{1}{(1 + i)(1 - i2)(1 + i3)} = \frac{1}{(3 - i)(1 + i3)}\\ &= \frac{1}{6 + i8} = \frac{6 - i8}{100} = \frac{6}{100} - i\frac{8}{100}\end{aligned}}$$

4. En interprétant z_1 et z_2 comme des vecteurs, représentez z_1, z_2 ainsi que leur somme et différence comme c'est indiqué ci-dessous :

a) $z_1 = 1 + i2; z_2 = -1 + i; z_1 + z_2; z_1 - z_2$

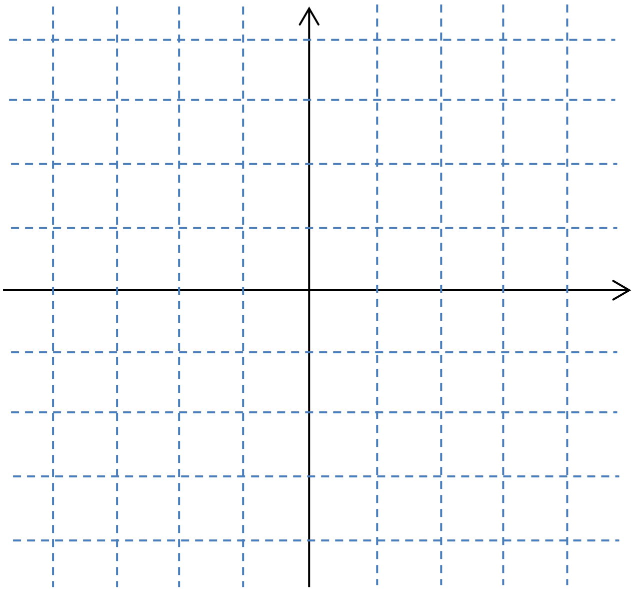
$z_1 + z_2 = i3;\ z_1 - z_2 = 2 - i$

b) $z_1 = 1 - i; z_2 = 1 + i; z_1 + z_2; z_1 - z$

$z_1 + z_2 = 2;\ z_1 - z_2 = -i2$

c) $z_1 = -i3; z_2 = -2 + i; z_1 + z_2; z_1 - z_2$

$z_1 + z_2 = -2 - i2;\ z_1 - z_2 = 2 - i4.$



5. trouvez les modules des nombres complexes suivants :

a) $(1-i)^2$:

$\boxed{\left|(1-i)^2\right| = 2}$

b) $i(2-i)-4(1+i0{,}25)$:

$\boxed{\left|i(2-i)-4(1+i0{,}25)\right| = \sqrt{10}}$

c) $\dfrac{2i}{3-i}$:

$$\left|\frac{2i}{3-i}\right| = \frac{|2i|}{|3-i|} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

d) $\dfrac{1-i2}{1+i}+\dfrac{2-i}{1-i}$:

$$\left|\frac{1-i2}{1+i}+\frac{2-i}{1-i}\right| = |1-i| = \sqrt{10}2$$

6. Ecrire les nombres complexes suivants, dans la forme polaire :

a) 2 : $\boxed{2 = 2(\cos 0 + i\sin 0)}$

b) -10 : $\boxed{-10 = 10(\cos\pi + i\sin\pi)}$

c) $1+i$: $\boxed{1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

d) $-\sqrt{3}+i$: $\boxed{-\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}$

e) $-2-i2\sqrt{3}$:

$$\boxed{-2-i2\sqrt{3} = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)}$$

f) $\dfrac{3}{-1+i}$: $\boxed{\frac{3}{-1+i} = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)}$

g) $-12-i15$: $\boxed{\begin{aligned}&-12-i15 = -3(4+i5)\\ &= 19{,}2(\cos 4{,}04 + i\sin 4{,}04)\end{aligned}}$

7. Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme a+ib :

a) $2e^{i\frac{\pi}{8}}$: ....

$$\boxed{2e^{i\frac{\pi}{8}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) = 1{,}84 + i0{,}76}$$

b) $4e^{i\frac{3\pi}{2}}$: ....

$$\boxed{4e^{i\frac{3\pi}{8}} = 4\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right) = 1{,}53 + i3{,}7}$$

c) $\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}$: ....

$$\boxed{\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2 + i2}$$

d) $\sqrt{3}.e^{i\frac{\pi}{3}}$: ....

$$\boxed{\sqrt{3}.e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = 1{,}673 + i0{,}448}$$