

Série 01

Les équations non linéaires

Exercice 01 :

01)- Séparer les racines réelles des équations

a)- $f(x) = x^4 + 4x + 2 = 0$, $k(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 1 = 0$

b)- graphiquement $g(x) = x - \sin(x) = 0$, $h(x) = x \ln(x) - 1 = 0$

02)- Déterminer le nombre de racines réelles de l'équation $f(x) = x + 2e^x = 0$

03)- Résoudre graphiquement l'équation $e^x - \frac{1}{x} = 0$.

Exercice 02 :

Soit l'équation $f(x) = x^4 - 5x - 7 = 0$

a)- Trouver la racine négative par la méthode de DICHOTOMIE, trouver le nombre d'itération si la précision demandée est $\varepsilon = 0.05$.

b)- Donner trois écritures possibles par la méthode du POINT FIXE en étudiant la convergence pour chaque écriture dans l'intervalle $[-1, -2]$.

Exercice 03 :

01)- Calculer la solution réelle de l'équation $e^x - \frac{1}{x} = 0$ sur l'intervalle $[0.5, 0.75]$

Par la méthode de DICHOTOMIE et la méthode de NEWTON, en effectuant quatre itérations (décompositions de l'intervalle).

02)- Comparer les résultats des deux méthodes.

03)- Calculer la solution réelle de l'équation $10^x - 2\cos(x) = 0$ sur l'intervalle $[0.2, 0.3]$ par la méthode du POINT FIXE, en effectuant quatre itérations, en partant de $x_0 = 0.3$.

Exercice 04 :

Soit la fonction $f(x) = 2x^3 - x - 2$

01)- Vérifier que la fonction f possède une racine réelle $\bar{x} \in [1, 2]$.

02)- Etudier la convergence des trois algorithmes suivants:

$$\text{a- } x_{n+1} = 2x_n^3 - 2, \quad \text{b- } x_{n+1} = \frac{2}{2x_n^2 - 1}, \quad \text{c- } x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + \frac{x_n}{2}}$$

03)- Si l'une des algorithmes converge, l'utiliser pour déterminer $\bar{x}$ à 10^{-3} près ($x_0 = 1$).

Exercice 05:

On considère la fonction $f(x) = e^x + 3\sqrt{x} - 2$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe un zéro α pour la fonction f dans $[0, 1]$.
2. On veut calculer le zéro α de la fonction f par une méthode de point fixe convenable. En particulier on se donne deux méthodes de point fixe $x = \phi_i, i = 1, 2$, où les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 sont définies comme :

$$\phi_1 = \text{Log}(2 - 3\sqrt{x}) \text{ et } \phi_2 = \frac{(2 - e^x)^2}{9}$$

Laquelle de ces deux méthodes utiliseriez-vous pour calculer numériquement le zéro α de la fonction f ? Justifiez votre réponse.

3. En utilisant la méthode de la bisection sur l'intervalle $[0, 1]$, pour calculer le zéro α de la fonction f avec une tolérance $\varepsilon = 10^{-10}$.

Exercice 06:

On se propose de résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation: $xch(x) = 1$.

Pour cela, on introduit la fonction d'itération g définie sur $\mathbf{R}$ par: $g(x) = \frac{1}{ch(x)}$

et on définit la suite $(u_n)_n$ par: $u_0 = 0$ et $u_n = g(u_{n-1})$ pour $n \geq 1$.

- 1- Montrer que $g([0, 1]) \subset [0, 1]$. En déduire que g admet un point fixe dans $[0, 1]$.
- 2- Calculer g' .

- 3- i. Montrer que pour tout $u \in \mathbf{R}$ on a $\frac{u}{1+u^2} \leq \frac{1}{2}$

- 3- ii. En déduire que $\forall x \in \mathbf{R} |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
(On rappelle que $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$).

- 4- En déduire que $(u_n)_n$ est une suite convergente.

Exercice 07:

On considère pour $x \in \mathbf{R}_+$ la fonction f définie par

$$f(x) = e^x \sqrt{x} - 1$$

Soit α l'unique solution de $f(x) = 0$

- 1- Vérifier que $\alpha \in I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$
- 2- On considère quatre suites définies, pour $x_0 \in I$, par :

$$\begin{array}{ll} (s1) & x_{n+1} = e^{-2x_n} \\ (s2) & x_{n+1} = e^{-\frac{x_n}{2}} \\ (s3) & x_{n+1} = -\ln(\sqrt{x_n}) \\ (s4) & x_{n+1} = e^{-x_n^2} \end{array}$$

Seules deux de ces suites sont susceptibles de converger vers α . Lesquelles?

Avec le théorème du point fixe, montrer qu'une seule de ces deux suites converge vers α , quel que soit $x_0 \in I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

- 3- Pour évaluer α , on préfère utiliser la méthode de Newton appliquée à l'équation $x = e^{-2x}$ (justifier)

Ecrire la méthode de Newton et pour $x_0 = 0.5$, calculer les trois itératifs premières.

Exercice 08:

Soit l'équation $f(x) = x^4 - 6x - 7 = 0$

- 1)- Trouver le nombre d'itérations si la précision demandée est $\varepsilon = 0.005$.
- 2)- Trouver la racine négative par la méthode de DICHOTOMIE sur l'intervalle $[-1.5, 0]$.

Exercice 09:

Soient les deux fonctions suivantes :

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = \log(1 + 2x)$$

On cherche à calculer numériquement l'aire comprise entre ces deux courbes. On note

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

- 1- Etudier la fonction h . Montrer qu'il existe deux valeurs pour lesquelles h s'annule : une valeur évidente (laquelle ?) et une valeur que l'on note α . Localiser α dans un intervalle $I = [i, i + 1]$ où i est un entier.

- 2- Pour approcher α , on définit la suite suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in I \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

Montrer que cette suite converge bien vers α .

- 3- Ecrire la méthode de Dichotomie qui permet de trouver une approximation de α , qui assure la convergence et calculer quatre itératifs dans $[1, 2]$.

Exercice 10:

Le problème "résoudre l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$ " peut être formulé de différentes façons pour son traitement par la méthode des approximations successives. L'équation peut s'écrire entre autres:

a) $x = 2x^2 - 6$

b) $x = \pm \sqrt{\frac{x+6}{2}}$

c) $x = \frac{3}{x} + \frac{1}{2}$

d) $x = x - \frac{2x^2 - x - 6}{3}$

- 1- Lesquelles de ces expressions conduisent-elles, à coup sûr, à une convergence par la méthode des approximations successives pour la racine $x = 2$ et pour la racine $x = -1.5$?
- 2- Vérifier vos conclusions en faisant quelques itérations pour chacune des formules et chacune des deux racines en partant de $x = 1.7$ et $x = -1.4$, respectivement.