

Solution série 01 Les équations non linéaires

Exercice 01:

01/ Séparation des racines:

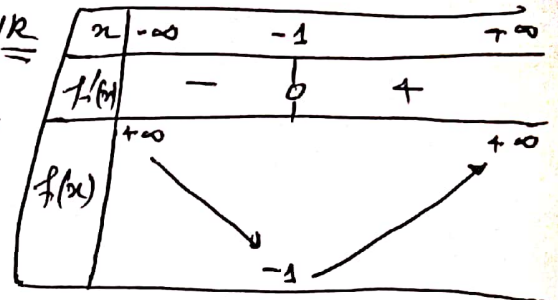
0-2 $f(x) = x^4 + 4x + 2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 4 \Rightarrow$ les racines de $f'(x)$

~~soit~~ : $4x^3 + 4 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow \boxed{x = -1} \in \mathbb{R}$

on applique $f(a)f(b) \leq 0 \Rightarrow \exists \bar{x} \in [a, b]$.

donc il y a deux racines

$\bar{x}_1 \in]-\infty, -1[$ et $\bar{x}_2 \in]-1, +\infty[$.



0-3 $k(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 1 \Rightarrow k'(x) = 3x^2 - 18x + 18$

$\Rightarrow$ les racines de $k'(x)$ sont $x^2 - 6x + 6 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2} \approx 1.268$

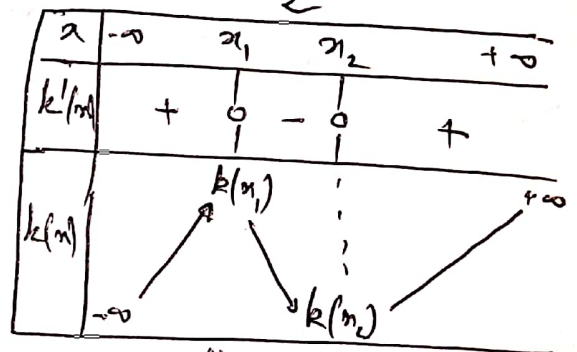
$\Rightarrow k(\alpha_1) \approx 9.40 > 0$ et $k(\alpha_2) \approx -11.4 < 0$

$\alpha_2 = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2} = 4.732$.

il y a trois racines $\bar{x}_1 \in]-\infty, \alpha_1[$

$\bar{x}_2 \in]\alpha_1, \alpha_2[$

$\bar{x}_3 \in]\alpha_2, +\infty[$.



b) Graphiquement,

* $g(x) = x - \ln(x)$

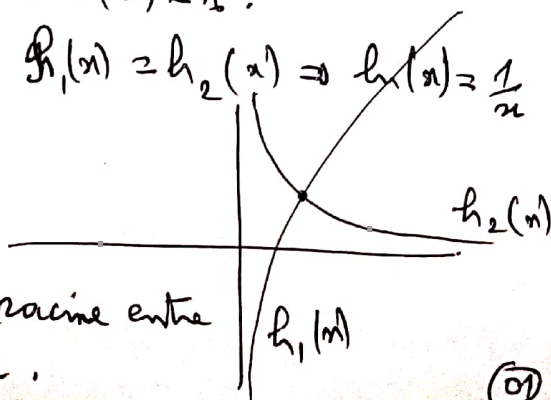
on pose $g_1(x) = g_2(x) \Rightarrow x = \ln(x)$

les solutions de $g(x) = 0$:

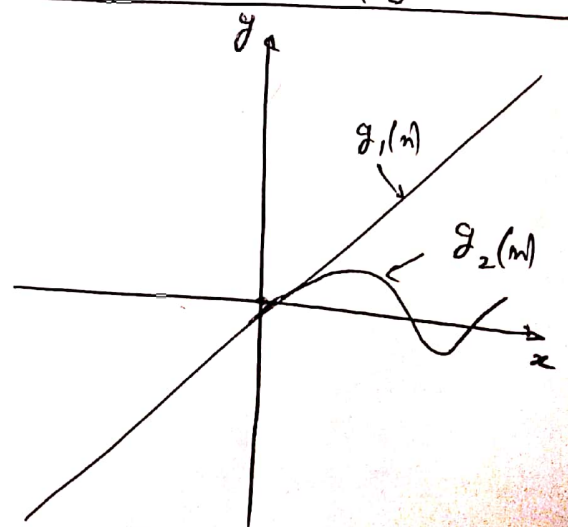
il y a une racine $\boxed{x = 0}$

* $h(x) = x \ln(x) - 1$.

on pose $h_1(x) = h_2(x) \Rightarrow h_1(x) = \frac{1}{x}$



il y a une racine entre 1 et 2.



2- $f(x) = x + 2e^x$.

on pose : $f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow -\frac{x}{2} = e^x$.

il y a une racine entre -1 et 0.

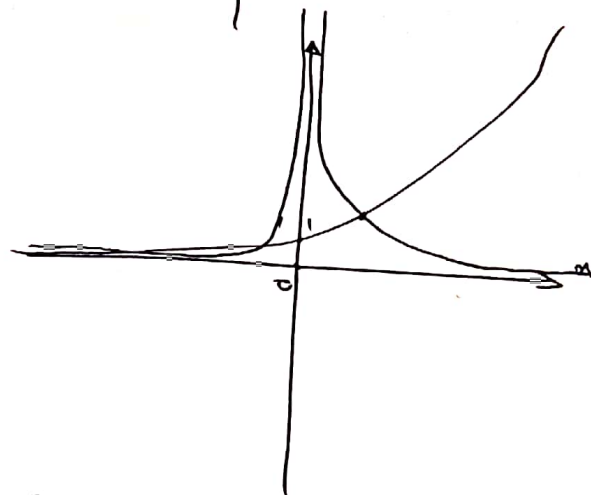
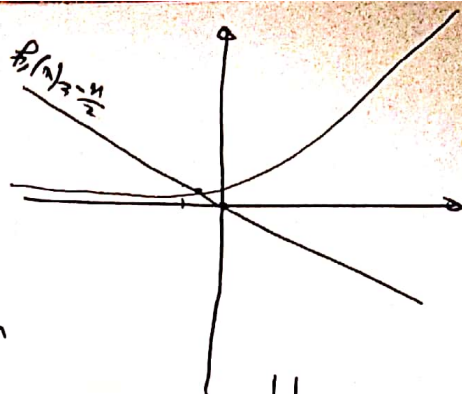
3 - Résolution graphique de l'équation

$$e^x - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow e^x = \frac{1}{x}$$

il y a deux racines.

$$\bar{x}_1 \in]-\infty, 0[$$

$$\bar{x}_2 \in]0, +\infty[$$



Exercice 021

$$f(x) = x^4 - 5x - 7$$

a- La méthode de Dichotomie $\bar{x} \in [-2, -1]$

$$f(-2) = 19 > 0, f(-1) = -4 < 0. \quad f(-2) \cdot f(-1) \leq 0.$$

$$c = \frac{a+b}{2}$$

la solution est 1.1015625

$$f(1.1015625) \approx -0.019751008$$

Le nombre d'itération si $\varepsilon = 0.05$

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{\ln(2)}$$

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{-1+2}{2 \cdot 0.05}\right)}{\ln(2)}$$

$$n \geq 3.32 \Rightarrow \boxed{n \approx 4}$$

b- La méthode point fixe:

$$x^4 - 5x - 7 = 0 \Rightarrow x(x^3 - 5) = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{x^3 - 5} = g_1(x).$$

$$x^4 - 5x - 7 = 0 \Rightarrow 5x = x^4 - 7 \Rightarrow x = \frac{x^4 - 7}{5} = g_2(x).$$

$$x^4 - 5x - 7 = 0 \Rightarrow x^4 = 5x + 7 \Rightarrow x = (5x + 7)^{\frac{1}{4}} = g_3(x).$$

n	a	b	c
1	-2 ⊕	-1 ⊖	-1.5 ⊕
2	-1.5 ⊕	-1 ⊖	-1.25 ⊕
3	-1.25 ⊕	-1 ⊖	-1.125 ⊕
4	-1.125 ⊕	-1 ⊖	-1.0625 ⊕
5	-1.0625 ⊕	-1.0625 ⊖	-1.0375 ⊕
6	-1.0375 ⊕	-1.0375 ⊖	-1.01875 ⊕
7	-1.01875 ⊕	-1.01875 ⊖	-1.009375 ⊕

$$* g_1(x) = \frac{7}{x^3-5} \Rightarrow g_1'(x) = \frac{-21x^2}{(x^3-5)^2} = -\frac{21x^2}{(x^3-5)^2}$$

$$-2 \leq x \leq -1 \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow -8 \leq x^3 \leq -1 \Rightarrow -13 \leq x^3-5 \leq -6$$

$$36 \leq (x^3-5)^2 \leq 169 \Rightarrow \frac{1}{169} \leq \frac{1}{(x^3-5)^2} \leq \frac{1}{36} \Rightarrow \frac{1}{169} \leq \frac{x^2}{(x^3-5)^2} \leq \frac{1}{9}$$

$$\frac{21}{169} \leq \frac{21x^2}{(x^3-5)^2} \leq \frac{21}{9} > 1 \text{ donc } g_1(x) \text{ n'a pas converge,}$$

$$* g_2(x) = \frac{x^4-7}{5} \Rightarrow g_2'(x) = \frac{1}{5} (4x^3) = \frac{4}{5} x^3$$

$$-2 \leq x \leq -1 \Rightarrow -8 \leq x^3 \leq -1 \Rightarrow -\frac{32}{5} \leq \frac{4}{5}x^3 \leq -\frac{4}{5}$$

$$\exists |g_2'(x)| > 1 \text{ donc n'a pas converge.}$$

$$* g_3(x) = (5x+7)^{1/4} \Rightarrow g_3'(x) = \frac{1}{4} (5) (5x+7)^{1/4-1} = \frac{5}{4} (5x+7)^{-3/4}$$

$$-2 \leq x \leq -1 \Rightarrow -10 \leq 5x \leq -5 \Rightarrow -3 \leq (5x+7) \leq 2$$

$$x \in [-7/5, +\infty[\text{ donc } \frac{-7}{5} \leq x \leq -1 \Rightarrow -7 \leq 5x \leq -5$$

$$0 \leq 5x+7 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (5x+7)^{-3/4} \leq (2)^{-3/4} < 1$$

$$\frac{5}{4} (2)^{-3/4} = \frac{5}{4} \left(\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \right) < 1 \text{ donc } g_3 \text{ a converge}$$

Exercice 03: $f(x) = e^x - \frac{1}{x} \Rightarrow g(x) = x e^x - 1 = 0$

La méthode de Dichotomie,

$$c = \frac{a+b}{2}, f(a) f(b) \leq 0$$

n	a	b	c
0	0.5 ⊖	0.75 ⊕	0.625 ⊕
1	0.5 ⊖	0.625 ⊕	0.5625 ⊖
2	0.5625 ⊖	0.625 ⊕	0.59375 ⊕
3	0.5625 ⊖	0.59375 ⊕	0.578125 ⊕
4	0.5625 ⊖	0.578125 ⊕	0.5703125 ⊖

(3)

La méthode de Newton:

$$f(x) = x e^x - 1 \Rightarrow f'(x) = e^x + x e^x = (1+x) e^x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n e^{x_n} - 1}{(x_n + 1) e^{x_n}}$$

$$= x_n - \frac{x_n - e^{-x_n}}{(x_n + 1)}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + x_n - x_n e^{-x_n}}{x_n + 1} = \frac{x_n^2 + e^{-x_n}}{x_n + 1}$$

n	x_n
0	0.5
1	0.571020439
2	0.567155568
3	0.56714329
4	0.56714329

② La méthode de Newton plus précise par rapport à la méthode de Dichotomie. La méthode de Newton dépend de la valeur initiale et la méthode de Dichotomie dépend de l'intervalle $[a, b]$.

③ La méthode de point fixe.

$$f(x) = 10^x - 2 \cos(x) = 0 \Rightarrow 10^x = 2 \cos(x) \Rightarrow x = \log_{10}(2 \cos(x))$$

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad |g'(x)| < 1 \quad g'(x) = \frac{g(x)}{x \ln(10)} = \frac{-\sin(x)}{2 \cos(x)} = \frac{-\tan(x)}{\ln(10)}$$

$$-1 \leq \tan(x) \leq 1 \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$(0.2) \leq x \leq 0.3 \Rightarrow 3.45 \cdot 10^3 \leq \sin(x) \leq 5.23 \cdot 10^3$$

$$0.9999999999 \leq \cos(x) \leq 0.9999999999$$

$$\Rightarrow 1.0000000000 \leq \frac{1}{\cos(x)} \leq 1.0000137 < 1$$

$$3.45 \cdot 10^3 \leq \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \leq 5.23 \cdot 10^3 < 1 \quad \text{la fonction ne converge.}$$

n	x_n
0	0.3
1	0.301024042
2	0.301024004
3	0.301024004

Exercice 04: $f(x) = 2x^3 - x - 2$.

① f possède une racine dans $[1, 2] \Rightarrow f(1) \cdot f(2) \leq 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(1) = -1$, $f(2) = 12 \Rightarrow f(1) \cdot f(2) \leq 0$ donc f admet une racine $\in [1, 2]$.

② la convergence des algorithmes suivants:

a- $f(x) = 2x^3 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2x^3 - 2 = g_1(x)$

Cet algorithme est convergent si et seulement si $|g'_1(x)| < 1, x \in [1, 2]$

$$g'_1(x) = 6x^2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow 6 \leq 6x^2 \leq 24 > 1.$$

donc n'est pas convergent.

b- $f(x) = 2x^3 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 - 1) = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{2x^2 - 1} = g_2(x)$

$$g'_2(x) = \frac{-8x}{(2x^2 - 1)^2} \quad 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq 2x^2 - 1 \leq 7$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{7} \leq \frac{1}{2x^2 - 1} \leq 1 \Rightarrow \frac{8}{7^2} \leq \frac{8x}{(2x^2 - 1)^2} \leq 16 > 1. \text{ Cet algorithme n'est pas convergent.}$$

c- $f(x) = 2x^3 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = x + 2 \Leftrightarrow x^3 = \frac{x+2}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1 + \frac{x}{2}} = g_3(x)$

$$g'_3(x) = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{x+2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq x+2 \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{x+2} \leq \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \leq \left(\frac{2}{x+2}\right)^{\frac{2}{3}} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \leq g'_3(x) \leq \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} < 1 \Rightarrow |g'_3(x)| < 1$$

donc cet algorithme est convergent.

③ pour déterminer α , nous utilisons l'algorithme $x_{n+1} = g_3(x_n)$

donc la solution est $\alpha \approx \underline{\underline{1.165}}$.

n	x_n
0	2
1	1.1447142
2	1.1628322
3	1.16506115
4	1.165334

Exercice 05: $f(x) = e^x + 3\sqrt{x} - 2$

① $x \in [0, 1]$ racine $\Rightarrow f(0) \cdot f(1) \leq 0$, $f(0) = -1$ et $f(1) = e + 1 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) \leq 0$ alors $\exists x \in [0, 1]$ racine de $f(x)$.

② on a: $\phi_1 = \log(2 - 3\sqrt{x})$ et $\phi_2 = \frac{(2 - e^x)^2}{9}$
on montre que ϕ_1 ou ϕ_2 est une convergence,

$$\phi_1' = \frac{-\frac{3}{2\sqrt{x}}}{2 - 3\sqrt{x}} = \frac{-3}{2\sqrt{x}(2 - 3\sqrt{x})}$$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 1, -3 \leq -3\sqrt{x} \leq 0 \Rightarrow -1 \leq 2 - 3\sqrt{x} \leq 0$$

alors ϕ_1 est une suite ~~diverge~~.

$$\phi_2' = \frac{2(-e^x)(e - e^x)}{9} = -\frac{2}{9} e^x (2 - e^x), x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq e^x \leq e,$$

$$-e \leq -e^x \leq 0 \Rightarrow 2 - e \leq 2 - e^x \leq 2.$$

donc nous pouvons écrire l'inégalité suivante:

$$0 \leq e^x (e^x - 2) \leq e(2 - e) \Rightarrow 0 \leq \frac{2}{9} e^x (e^x - 2) \leq \frac{2e(2 - e)}{9} < 1$$

alors ϕ_2 est une suite converge.

3. $x \in [0, 1]$, $\varepsilon = 10^{-10}$ estimer n levez.

$$\text{on a: } \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \Rightarrow 2^{n+1} \geq \frac{b-a}{\varepsilon} \Rightarrow (n+1) \ln 2 \geq \ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right).$$

$$n+1 \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{\ln(2)}.$$

$$\underline{\text{A.N!}} \quad n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{10^{-10} \cdot 2}\right)}{\ln 2} \Rightarrow n \geq 32.21 \text{ alors } \boxed{n = 33}$$

Exercice 06: $g(x) = \frac{1}{\text{ch}(x)}$

ex. on a la fonction $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1$ toujours $\forall x \in]-\infty, +\infty[$.

$\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{\text{ch}(x)} \geq 0$ alors $0 \leq g(x) \leq 1$ donc $g([0, 1]) \subset [0, 1]$.

$$\text{on a: } \begin{cases} 0 \leq g(x) \leq 1 \\ \text{et} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \exists x \in [0, 1] / x = g(x).$$

$$\text{ou } x - g(x) = x - \frac{1}{\text{ch}(x)} = f(x). \quad \textcircled{6}$$

$$f(0) = 0 - \frac{1}{ch(0)} = -1, \quad f(1) = 1 - \frac{2}{e+e^{-1}} > 0 \quad \text{alors}$$

$\exists \alpha$ racine de $\alpha - g(x) = f(x)$, $\in [0, 1] \Rightarrow \alpha - g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = g(\alpha)$
est un point fixe

$$\underline{2.} \quad g'(x) = \left(\frac{1}{ch(x)} \right)' = \frac{-sh(x)}{ch^2(x)} = \frac{-sh(x)}{1+sh^2(x)}$$

$$\underline{3.i.} \quad \frac{u}{1+u^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \text{on a: } (1-u^2) \geq 0 \Rightarrow 1+u^2-2u \geq 0$$

$$1+u^2 \geq 2u \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \geq \frac{u}{1+u^2}}$$

$$\underline{3.ii.} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{on pose } u = sh(x) \Rightarrow g'(x) \equiv h'(u) = \frac{-u}{1+u^2} \Rightarrow |g'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

04. on a: $\forall x \in [0, 1]$. $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ donc la suite $(u_n)_n$ est une suite convergente.

Exercice 07:

ex 08: $f(x) = x^4 - 6x - 7$

Le nombre d'itération

On a: $n \geq \frac{\ln(\frac{b-a}{\epsilon})}{\ln(2)}$, $[a,b] = [-1.5, 0]$
 $\epsilon = 0.001$

$\therefore n \geq \frac{\ln(\frac{0+1.5}{2 \cdot 0.001})}{\ln(2)}$

$n \geq 7.8292 \Rightarrow \boxed{n \geq 8}$

La racine négative par la

de la Dichotomie sur

l'intervalle $[-1.5, 0]$ avec

$\frac{a+b}{2}$,

0.9;

n	a	b	c
0	-1.5 [⊕]	0 [⊖]	-0.75 [⊖]
1	-1.5 [⊕]	-0.75 [⊖]	-1.125 [⊕]
2	-1.125 [⊕]	-0.75 [⊖]	-0.9375 [⊖]
3	-1.125 [⊕]	-0.9375 [⊖]	-1.03125 [⊕]
4	-1.03125 [⊕]	-0.9375 [⊖]	-0.984375 [⊖]
5	-1.03125 [⊕]	-0.984375 [⊖]	-1.0078 [⊕]
6	-1.0078 [⊕]	-0.984375 [⊖]	-0.9960875 [⊖]
7	-1.0078 [⊕]	-0.9960875 [⊖]	-1.001943 [⊕]
8	-1.001943 [⊕]	-0.9960875 [⊖]	-0.99901125 [⊖]

Exercice 08: $f(x) = x^4 - 6x - 7$

1- Le nombre d'itération

On a: $n \geq \frac{\ln(\frac{b-a}{\epsilon})}{\ln(2)}$, $[a,b] = [-1.5, 0]$
 $\epsilon = 0.005$

A.N: $n \geq \frac{\ln(\frac{0+1.5}{2 \cdot 0.005})}{\ln(2)}$

$n \geq 7.8292 \Rightarrow \boxed{n = 8}$

2- La racine négative par la méthode de Dichotomie sur l'intervalle $[-1.5, 0]$ avec

$c = \frac{a+b}{2}$

Exercice 09:

n	a	b	c
0	-1.5 [⊕]	0 [⊖]	-0.75 [⊖]
1	-1.5 [⊕]	-0.75 [⊖]	-1.125 [⊕]
2	-1.125 [⊕]	-0.75 [⊖]	-0.9375 [⊕]
3	-1.125 [⊕]	-0.9375 [⊖]	-1.03125 [⊖]
4	-1.03125 [⊕]	-0.9375 [⊖]	-0.984375 [⊕]
5	-1.03125 [⊕]	-0.984375 [⊖]	-1.0078 [⊖]
6	-1.0078 [⊕]	-0.984375 [⊖]	-0.9960875 [⊕]
7	-1.0078 [⊕]	-0.9960875 [⊖]	-1.001943 [⊖]
8	-1.001943 [⊕]	-0.9960875 [⊖]	-0.99901525 [⊖]