Université Djilali Bounaama de Khemis Miliana — **LMD S.M**
Faculté des Sciences et de la Technologie — **Programmation numérique**
Niveau: 1er année master physique théorique — **07-10-2020**

Examen de semestre 2
(01 heure 30 minutes)

Exercice 01: (07 points)

On veut calculer l'unique racine positive r de l'équation $f(x) = 0$ où

$$f(x) = e^x - x - 2$$

On vous propose d'appliquer 2 méthodes de points fixes, basées sur les fonctions suivantes

$$g_1(x) = e^x - 2$$
$$g_2(x) = ln(x + 2)$$

01 pts

1- Comment ces fonctions g_1 et g_2 ont-elles été obtenues ? (Détaillez vos réponses).
2- Dans quel intervalle de longueur 1 se trouve cette racine ? (justifier). 0,5 pts
3- En déduire si les deux méthodes de points fixes g_1 et g_2 convergent. 02 pts 01 pts
4- Faire deux itérations à partir de $x_0 = 1$ pour chacune des deux méthodes de point fixe.
5- Appliquer la méthode de Newton à l'équation de départ et faites 2itérations à partir de $x_0 = 1$. 01,5 pts
6- Pour quelle(s) valeur(s) de x_0 ne peut-on pas démarrer la méthode de Newton. 01 pt

Exercice 02: (07 points)

On pose

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

1) Donner la décomposition LU de la matrice A (i.e. $A = LU$ avec L triangulaire inféréieure et U triangulaire supérieure) 02,5
2) En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ où b = $(9, 9, 6)^T$ 01,5 pts
3) En déduire le déterminant de la matrice A. 01 pt
4) Soit $= U^T A L^T$, sans calculs supplémentaires, donner une décomposition $L_1 U_1$ de la matrice B. 02 pts

Exercice 03: (06 points)

On considérer, pour $t \in [1, 2]$, le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y'(t) = te^{-y(t)} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

a) Le problème admet-il une et une seule solution ? 01 pt
b) Donner la solution exacte de ce problème. Quelle est la valeur de $y(2)$? 03 pts
c) On prend un pas de temps $\Delta t = 0,5$ et $y_0 = 0$. Quelle approximation de $y(2)$ obtient-on avec le schéma d'Euler ? 02 pts

M. BOUKABCHA — ** BON COURAGE**

Solution de l'examen
Analyse numérique
1e master physique
théorique 2019/2020.

Exercice 01 : on a $f(x) = e^x - x - 2$.

1/ nous pouvons écrire les deux fonctions $g_1(x)$ et $g_2(x)$ à partir de f comme suit :

1-a : $g_1(x)$: on a $f(x) = e^x - x - 2 = 0 \Rightarrow x = e^x - 2$

donc $x = g_1(x) = e^x - 2 \Rightarrow \boxed{g_1(x) = e^x - 2}$ 0,5

1-b : on a $f(x) = e^x - x - 2 = 0 \Rightarrow e^x = x + 2$

$\Rightarrow x = \ln|x+2| = g_2(x) \Rightarrow \boxed{g_2(x) = \ln(x+2) \quad x > -2}$

2/ $f(1) = e - 3 < 0$ 0,5
$f(2) = e^2 - 4 > 0$ $\Rightarrow$ d'où l'intervalle $[1, 2]$. 0,5

3/ $g_1'(x) = e^x$ si $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow e^1 \leq e^x \leq e^2$ donc la méthode de point fixe diverge. 01

$g_2'(x) = \dfrac{1}{x+2}$ si $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 3 \leq x+2 \leq 4 \Rightarrow$

$\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{x+2} \leq \dfrac{1}{3}$ donc la méthode de point fixe converge. 01

4/ pour $g_1(x) = e^x - 2$

$x_1 = g(x_0) = e - 2$ 0,5
$= 0,71828182$

$x_2 = g(x_1) = e^{e-2} - 2$
$= 0,05090635$

$g_2(x) = \ln(x+2)$

$x_1 = g(x_0) = \ln(3)$ 0,5
$= 1,098612289$

$x_2 = g(x_1) = \ln(\ln(3) + 2)$

$= 1.1309$.

5/ Méthode de Newton de la fonction $f(x)$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{e^{x_k} - x_k - 2}{e^{x_k} - 1}$$ 0,5 01

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{e^{x_0} - x_0 - 2}{e^{x_0} - 1} = \underline{1.1639}. \quad (0,25)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{e^{x_1} - x_1 - 2}{e^{x_1} - 1} = \underline{1.1464}. \quad (0,25)$$

6/ Les valeurs pour lesquelles $f'(x_0) = 0$, c'est-à-dire

$$f'(x_0) = e^{x_0} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x_0} = 1 \Rightarrow \boxed{x_0 = 0} \quad (01)$$

Exercice 02 : on a la matrice A et le vecteur b.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

1/ la décomposition LU.

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ -1/6 & 1 & 0 \\ -2/6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ (0,25), \quad A^{(1)} = P^{(1)}A = \begin{bmatrix} 1 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 17/6 & 11/6 \\ 0 & -2/6 & 11/3 \end{bmatrix}$$

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6/17 & 0 \\ 0 & 2/17 & 1 \end{bmatrix} \ (0,25), \quad A^{(2)} = P^{(2)}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 11/17 \\ 0 & 0 & 66/17 \end{bmatrix}$$

$$P^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 17/66 \end{bmatrix} \ (0,25), \quad A^{(3)} = U = P^{(3)}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 11/17 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on a $A^{(3)} = U = P^{(3)}P^{(2)}P^{(1)}A \Rightarrow A = \underbrace{(P^{(1)})^{-1}(P^{(2)})^{-1}(P^{(3)})^{-1}}_{L}U$

$$(P^{(1)})^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (P^{(2)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 17/6 & 0 \\ 0 & -2/6 & 1 \end{bmatrix}, \quad (P^{(3)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 66/17 \end{bmatrix}$$

$$L = (P^{(1)})^{-1}(P^{(2)})^{-1}(P^{(3)})^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 17/6 & 0 \\ 2 & -2/6 & 66/17 \end{bmatrix} \quad (01)$$

(02)

2/ La solution du système linéaire $Ax = b$, $A = LU$

$$\underbrace{LUx}_{y} = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

$$Ly = b \Leftrightarrow \begin{cases} 6y_1 = 9 \\ y_1 + \frac{17}{6} y_2 = 9 \\ 2y_1 - \frac{1}{3} y_2 + \frac{66}{17} y_3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 3/2 \\ y_2 = (9 - 3/2) \cdot \frac{6}{17} = \frac{45}{17} \\ \frac{66}{17} y_3 = 6 - 2y_1 + \frac{1}{3} y_2 \\ \quad = \frac{66}{17} \Rightarrow \boxed{y_3 = 1} \end{cases}$$

$$y^T = (3/2, \frac{45}{17}, 1).$$

$$Ux = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{6} x_2 + \frac{1}{6} x_3 = 3/2 \\ x_2 + \frac{11}{17} x_3 = \frac{45}{17} \\ x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = \frac{45}{17} - \frac{11}{17} x_3 = 2 \\ x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{6} x_2 - \frac{1}{6} x_3 \\ \quad = 1 \end{cases}$$

01,75

$$x^T = (1, 2, 1)$$

3/ le déterminant de la matrice A.

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L) \cdot \det(U) = 6 \cdot \frac{17}{6} \cdot \frac{66}{17} = \boxed{66}$$

01

4/ $B = U^T A L^T = L_1 U_1$ et $A = LU$.

donc $B = U^T L U L^T = L_1 U_1 \Rightarrow$ ~~B~~ $\underline{L_1 = U^T L}$ et $\underline{U_1 = U L^T}$

$$L_1 = U^T L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1 & 0 \\ 1/6 & \frac{11}{17} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 17/6 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{3} & \frac{66}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{17}{6} & 0 \\ \frac{62}{17} & 3/2 & 66/17 \end{bmatrix}$$

01

$$U_1 = U L^T = \begin{bmatrix} 1 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 11/17 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 0 & 17/6 & -1/3 \\ 0 & 0 & 66/17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 53/36 & \frac{793}{306} \; \frac{1889}{969} \\ 0 & 17/6 & \\ 0 & 0 & 66/17 \end{bmatrix}$$

01

Exercice 03 :
$$\begin{cases} y'(t) = t\, e^{-y(t)} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

a – Le problème admet une seule solution

la fonction $f(t,y)$ est lipschitzienne dans l'intervalle $[0,2]$ alors

$$|f(t_1, y_2) - f(t_1, y_1)| = |t_1 e^{-y_2(t_1)} - t_1 e^{-y_1(t_1)}|$$
$$\leq |t_1 (y_2 - y_1)|$$
$$\leq t_1 |y_2 - y_1|$$
$$\leq 2 |y_2 - y_1|$$

$\exists L = 2$ alors : la fonction $f(t,y)$ continue sur le domaine D.

$D = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq t \leq 2, -\infty < y < +\infty\}$ alors le problème admet une seule solution. 01

b – La solution exacte.

$$y'(t) = t e^{-y(t)} \Rightarrow \frac{dy}{e^{-y}} = t\,dt \Rightarrow e^{y} dy = t\,dt$$

01

$e^{y} = \frac{t^2}{2} + c \Rightarrow y = \ln\left|\frac{t^2}{2} + c\right|$, si $t = 1$, $y = 0 \Rightarrow 0 = \ln\left(\frac{1}{2} + c\right)$

$\Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{2}} \Rightarrow y = \ln\left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$, $t \in [1,2]$, à $t = 2 \Rightarrow y(2) = \ln(5/2)$

01 01

$= 0.916290731$

c – on a un pas de temps $\Delta t = h = 0.5$, $y_0 = 0$.

$t_i = a + i \times h \Rightarrow t_0 = a = 1$, $t_1 = a + h = 1 + 0.5 = 1.5$, $t_2 = a + 2h$

$t_2 = 1 + 2 \cdot 0.5 = 2$.

$t_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0 \Leftrightarrow y(1) = 0$

$t_1 = 1.5 \Rightarrow y_1 = y_0 + h\, f(t_0, y_0) = 0 + 0.5\,(1\, e^{-0}) = \underline{0.5}$ 01

$t_2 = 2 \Rightarrow y_2 = y_1 + h\, f(t_1, y_1) = 0.5 + 0.5\,(1.5\, e^{-0.5})$

$= \underline{0.954897994}$ 01

04