Série N° 02

Résolution des systèmes linéaires

Exercice 01: On considère les matrices suivantes:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&0\\5&6&7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&6&0&0\\0&0&3/4&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\ \text{et}\ D=\begin{pmatrix}1&2&4\\1&3&9\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

1)- Calculer le déterminant de A, B, C et D.
2)- En déduire le déterminant de produit A.B.
3)- Calculer C^{-1}.

Exercice 02: On considère la matrice : $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\2&2&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$

1)- Calculer le déterminant de A.
2)- Calculer A^{-1}.
3)- Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs, les vecteurs propres et le rayon spectral.
4)- Calculer les normes suivantes $\|A\|_\infty$, $\|A\|_1$ et $\|A\|$.

Exercice 03: Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes linéaires suivants :

01) $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=5\\4x_1+4x_2-3x_3=3\\-2x_1+3x_2-x_3=1\end{cases}$, 02) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\4x_3+2x_2=1\\3x_1+3x_2+x_3=1\end{cases}$, 03) $\begin{cases}2x_1+x_2+4x_4=2\\-4x_1-2x_2+3x_3-7x_4=-9\\4x_1+x_2-2x_3+8x_4=2\\-3x_2-12x_3-x_4=2\end{cases}$

Exercice 04: $A=\begin{bmatrix}-1&3&3\\3&-1&-3\\-3&3&5\end{bmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&2&3\\3&2&1&2\\4&3&2&1\end{pmatrix}$

1)- Trouver la décomposition LU de la matrice A par la méthode de Gauss.
2)- Trouver A^{-1} et B^{-1} par la méthode de Gauss –Jordan.
3)- En déduire det(A) et det(B).
4)- En déduire les solutions de $AX=(5,-1,5)^t$ et $BX=(1,-2,2,3)^t$.

Exercice 05: On considère les matrices: $A=\begin{bmatrix}-14&18&-27\\4&-4&7\\12&-12&22\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-56&-14&1\\12&4&0\\48&12&0\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}296\\-64\\-240\end{bmatrix}$.

1 – Décomposer B en LU où L et U sont deux matrices triangulaires inférieure et supérieure respectivement.
2 – Inverser la matrice B par la méthode de Gauss-Jordan.
3 – En déduire la solution du système $Bx=b$.
4 – On considère la suite de vecteurs : $Y^{(n)}=A^n\,Y^{(0)}$ et $Y^{(0)}={}^t(1,0,0)$
4 – 1 – Calculer $Y^{(1)},Y^{(2)}$ et $Y^{(3)}$.

4 – 2 – Donner le polynôme caractéristique de A qui définir par la relation suivante :

$P_n(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} x_i \lambda^{n-i}$ où $x_0 = 1$ et $x_i, i = 1, \ldots, n$ sont des solutions du système qui s'écrit comme $\left(Y^{(2)}, Y^{(1)}, Y^{(0)}\right)^t (x_1, x_2, x_3) = -Y^{(3)}$.

Exercice 06: On considère le système linéaire: $A X = b$ (1)

où $A = (a_{ij})$ est une matrice réelle, carrée, d'ordre n, inversible et d'éléments diagonaux $a_{ii}, i = 1,2, \ldots, n$ non nuls, X et b donnée sont deux vecteurs de R^n notés:

$X^t = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $b^t = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

On décompose A en $A = M - N$ où Met N sont les matrices d'éléments:

$$M_{i\,j} = \begin{cases} a_{i\,j} & i \geq j \\ 0 & i < j \end{cases}, \qquad N_{i\,j} = \begin{cases} -a_{i\,j} & i > j \\ 0 & i \leq j \end{cases}$$

1- Vérifier que le système (1) est équivalent au système: $X = M^{-1}NX + M^{-1}b$ (2)

On associe à ce système le schéma itératif: $X^{(k+1)} = M^{-1}NX^{(k)} + M^{-1}b$ (3)

Ecrire une condition suffisante de convergence de (3).

2- Etablir une relation de récurrence permettant de calculer les éléments $g_{i\,j}$ et X_j des matrices $G = M^{-1}N$ et $X = M^{-1}b$ en fonction des éléments $a_{i\,j}$ de A et b_i de b.

3- Montrer que:

$$a_{i\,i}x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{i\,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i\,j}x_j^{(k)} + b_i, \qquad i = 1,2,3, \ldots\ldots, n$$

4- Application: on considère le système $A X = b$ avec:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \; et \; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 23 \\ 16 \end{bmatrix}$$

En partant du vecteur initial ${}^tX^{(0)} = (1,0,0)$, déterminer la solution de ce système à l'aide du schéma (3).

Exercice 07: On considère la matrice A et le vecteur b:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad b = (4 \quad -3 \quad 5)^T.$$

01)- Résoudre le système $AX = b$ par la méthode de Jacobi et par la méthode de Gauss-Seidel. On partira du vecteur $x^{(0)} = (0,0,0)^t$.

02)- Retrouver la solution précédente en inversant A par la méthode de Gauss-Jordan.

Exercice 08: On considère la matrice A et le vecteur b:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 23 \\ 16 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

01)- Montrer, sans le calcul des valeurs propres, que la méthode de Jacobi correspondante à (1) converge quelque soit $x^{(0)}$.

02)- Résoudre le système $AX = b$ par la méthode de triangularisation de Gauss. Donner la décomposition LU de A où les matrices L et U sont triangulaires inférieure et supérieure respectivement. En déduire A^{-1}.

03)- Résoudre le même système, avec une précision $\varepsilon = 10^{-2}$, par la méthode de Jacobi. On partira de: $x^{(0)} = (1,0,0)^t$.

04)- Résoudre le même système par la méthode de Gauss-Seidel. On prendra le même vecteur initial qu'à la question précédente et avec la même précision.