Résolution d'équations différentielles

Exercice 01:

Vérifier que les fonctions suivantes sont des fonctions Lipschitziennes en y sur $D \subset \mathbb{R}^2$.

01)- $f(x, y) = x|y|$ $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 4\}$

02)- $f(x, y) = 1 + x \sin(xy)$ $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2\}$

03)- $f(x, y) = -y + x + 1$ $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1\}$

Exercice 02:

01)- Démontrer que pour tout $T > 0$, ce problème admet une solution unique.

$y'(x) = 1 + x \sin(xy)$ $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq T\}$ et $y(0) = 0$

02)- Démontrer que ce problème admet une solution unique.

$y'(x) = -y + \frac{x}{(1+x)^2}$, $D \equiv \mathbb{R}^2$ et $y(0) = 1$.

Exercice 03:

Utiliser la méthode d'Euler pour trouver les premières quatre valeurs de la solution $y = f(x)$ de l'équation différentielle

$$y' = \frac{y - x}{y + x}$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 1$, en prenant le pas $h = 0.1$. Effectuer les calculs avec trois décimales exactes.

Exercice 04:

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(x) = x - y + 1, & x \in [0, 1] \\ y(0) = 1, & h = 0.1 \end{cases}$$

Trouver les valeurs approchées de $y(x_i)$, $i=0,1,\dots,N$ par:

01)- la méthode d'Euler.

02)- la méthode d'Euler modifiée.

Comparer les résultats obtenus avec la solution exacte.

Exercice 05:

Calculer les valeurs approchées de la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(x) = y - \frac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Aux points $x_1 = 0.2$ et $x_2 = 0.4$ d'après les méthodes RK-2 et RK-4. Effectuer les calculs avec 4 décimales exactes. Estimer les résultats obtenus, si la solution exacte est

$y(x) = \sqrt{2x + 1}$.

Exercice 06:

On considère, pour $t \in [0, 2]$, le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \exp(-y(t)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- 1- Le problème admet-il une et une seule solution ?
- 2- Donner la solution exacte de ce problème. Quelle est la valeur de $y(2)$?

On prend un pas de temps $\Delta t = 0.5$. Quelle approximation de $y(2)$ obtient-on avec le schéma d'Euler.

Exercice 07:

Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{y(x)}{2} - 3x + 2 \quad \forall x \in [1, +\infty[\\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Que l'on cherche à résoudre numériquement en utilisant l'algorithme de Rang Kutta d'ordre 4 en prenant un pas d'intégration $h = 0.1$.

- 1- Déterminer la solution exacte $y_{ext}(x)$ de cette équation différentielle et calculer ses valeurs $y_{ext}(x_i)$ pour $i = 1$ et $i = 2$, sachant que $x_0 = 1$.
- 2- Ecrire et appliquer l'algorithme de Rang Kutta d'ordre 4 pour déterminer les valeurs approchées de la solution $y_i = y(x_i)$ pour $i = 1$ et $i = 2$. Comparer ces valeurs approchées avec les valeurs de la solution exacte.

Exercice 08:

On considère l'équation différentielle par :

$$3- y' = -\frac{y}{x+1} \text{ avec } y(0) = 1 \text{ et } x \in [0, 1]$$

- 1)- Montrer que cette équation admet une solution unique.
- 2)- Résoudre cette équation par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 dans l'intervalle $[0, 1]$ avec un pas de 0.2.
- 3)- On considère l'équation différentielle par :

$$(1 + x)y'' + y' = 0 \text{ avec } y'(0) = 1 \text{ et } x \in [0, 1]$$

Par un changement de variable adéquat, déduire de la question précédente les valeurs de : $y'(0.2)$, $y'(0.4)$, $y'(0.6)$, $y'(0.8)$ et $y'(1)$.