Chapitre 3 : Synthèse des filtres numériques RIF

3.1. Définition :

La fonction de transfert du filtre $H(z)$ est rationnelle : $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^{M} b_n z^{-n}}{1-\sum_{n=1}^{N} a_n z^{-n}} \qquad \text{III.1}$$

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + \cdots + a_N y(n-N) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + a_M x(n-M)$$

- si $a_n = 0$ le filtre s'appelle non récursif ou RIF (à Réponse Impulsionnelle Finie)
- si $a_n \neq 0$ le filtre s'appelle récursif ou RII (à Réponse Impulsionnelle Infinie)
- Le filtre numérique est stable si les pôles de $H(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité.
- Il est linéaire et invariant dans le temps : la somme de convolution est applicable.

3.2. Filtres non-récursif (ou à réponse impulsionnelle finie, RIF)

Introduction :

Les filtres à réponse impulsionnelle finie présente une catégorie très importante des filtres numériques.

Remarque :

Dans le cas d'un filtre RIF, la réponse impulsionnelle est égale aux coefficients de l'équation de récurrence. En effet, on a d'une part :

La fonction de transfert d'un filtre RIF s'écrit :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h(n) z^{-n} \qquad \text{III.2}$$

Ceci implique qu'un filtre RIF a M+1 pôles à l'origine est toujours stable. Une autre propriété intéressante des filtres RIF est qu'ils peuvent donner une phase linéaire ce qui le rend très intéressant pour un grand nombre d'applications pratiques.

3.3. Filtres RIF à phase linéaire :

Les signaux qui passent à travers un filtre à phase linéaire seront reproduits exactement avec un retard constant égale à la perte (dérivée) de la phase. Les filtres RIF peuvent avoir une phase linéaire exacte.

Exemple :

$$h(n) = h(N-1-n)$$

Démontrer que c'est un filtre à phase linéaire.

Démonstration :

$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h(n)z^{-n}$; $M = N - 1$

$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=N/2}^{N-1} h(n)z^{-n}$: changement de variable n=N-1-k

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{k=\frac{N}{2}-1}^{k=0} h(N-1-k)z^{-N+1+k} \quad \text{III.3}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} h(k)z^{-N+1+k} \quad \text{III.4}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-(N-1-n)} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)(z^{-n} + z^{-(N-1-n)} \quad \text{III.5}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n}\,(1 + z^{-(N-1)}) \quad \text{III.6}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-(N-1)/2}\,(z^{-n+(N+1)/2} + z^{n-(N-1)/2}) \quad \text{III.7}$$

La réponse fréquentielle d'un filtre RIF est la suivante : $z = e^{jw}$

Si la condition de symétrie est satisfaite $h(n) = h(M-n)$ la somme ci-dessus peut s'écrire sous la forme :

$$H(e^{jw}) = \begin{cases} e^{-j\frac{w(N-1)}{2}}[h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n)\cos(w(n-\frac{N-1}{2}))] & pour\ (N-1)\ paire \\ e^{-j\frac{w(N-1)}{2}}[h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{(N-3)}{2}} 2h(n)\cos(w(n-\frac{N-1}{2}))] & pour\ M\ impaire \end{cases} \quad \text{III.8}$$

Dans cette équation le terme entre les crochets est réel.

La phase est donc $-\frac{w(N-1)}{2}$, ce qui veut dire que la phase est linéaire et correspond à un délai (retard)de $\frac{N-1}{2}$ échantillons.

$$\tau = -\frac{d}{dw}\varphi(w) = \frac{N-1}{2} \quad \text{III.9}$$

Dans beaucoup de cas pratiques, les filtres à phase linéaire sont exigés. De plus, cette propriété permet une implantation plus facile des filtres RIF. C'est la raison pour laquelle nous ne considérons que les filtres à phase linéaire.

3.4.Conception des filtres RIF utilisant des fenêtres :

Soit $H_d(e^{jw})$ la fonction de transfert désirée.

$$H_d(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)e^{-jwn} \quad \text{III.10}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{jw})e^{jwn}\,dw$$ III.11

<u>En général :</u>

$h_d(n)$ est de longueur infinie. Pour obtenir une réponse impulsionnelle finie, on peut tronquer $h_d(n)$: $h(n) = \begin{cases} h_d(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0, ailleurs \end{cases}$ III.12

Cette troncation est équivalente à une multiplication d'une fonction porte par le $h_d(n)$

$h(n) = h_d(n).w(n)$où $w(n)$est une fenêtre de longueur finie.

$$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0, ailleurs \end{cases}$$ III.13

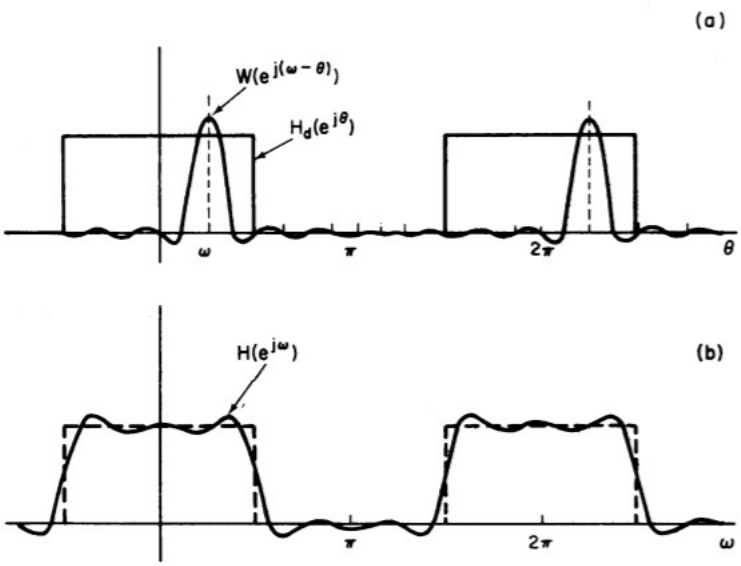
La multiplication dans le temps correspond à une convolution dans le domaine de fréquence. L'utilisation des fenêtres est la méthode la plus directe de la conception des filtres RIF. Imaginer que nous avons à notre disposition la réponse fréquentielle recherchée $H_d(e^{jw})$. En général, pour des filtres de fréquence, c'est une constante, 1, pour une plage fréquentielle et zéro pour le reste des fréquences. La réponse temporelle d'un tel filtre peut être calculée en faisant une transformé de Fourier inverse sur cette réponse fréquentielle.

$$\Longrightarrow H(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{N-1} h_d(n)e^{-jwn}$$ III.14

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta})W(e^{j(w-\theta)})d\theta$$

Où : $W(e^{jw}) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{N-1} 1.e^{-jwn} = \frac{1-e^{-jwN}}{1-e^{-jw}} = e^{-jw(N-1)/2}\frac{\sin(\frac{wN}{2})}{\sin(w/2)}$ III.15

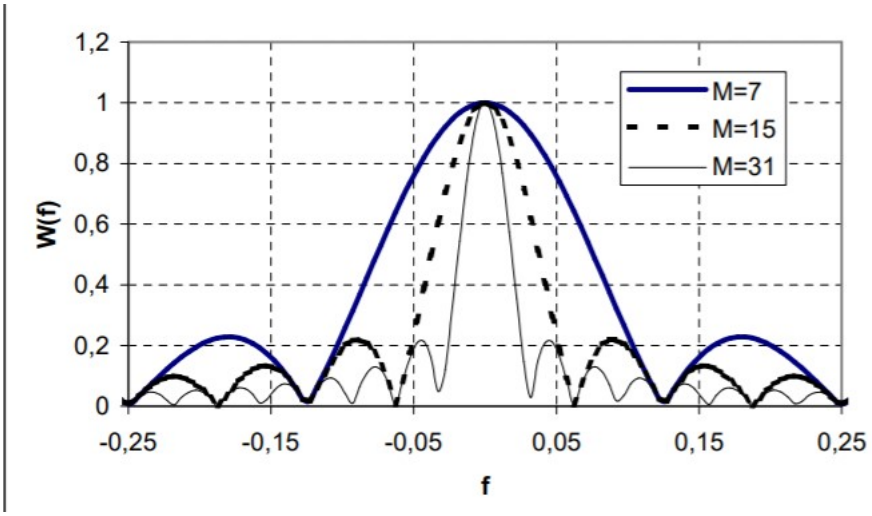
Le schéma ci-dessous présente graphiquement cette relation.



Ceci signifie que la réponse fréquentielle résultant est la réponse "arrondie" du filtre désiré. C'est à dire que les discontinuités du filtre idéal sont remplacées par des ondulations autour de ces sauts. Pour ne pas trop dégrader la réponse idéale, la fenêtre doit avoir un certain nombre de propriétés. Dans le domaine fréquentiel, il faut qu'il se rapproche à un delta Dirac. Si on augmente la taille de la fenêtre, la largeur du lobe principal se réduit, d'où l'effet d'arrondissement va réduire. Plus la variation de $H_d(e^{jw})$ est important, plus nous avons besoins d'un $H(e^{jw})$ pointu ce qui se traduit par une fenêtre plus longue. De l'autre côté, il est préférable d'avoir un h(n) le plus court possible d'où une petite fenêtre (pour des raisons de complexité d'implantation). Il y a donc un compromis entre ces deux propriétés contradictoires.

La figure ci-dessous présente la réponse fréquentielle de w(n) pour différentes valeurs de

$M = N - 1$. Il se voit qu'en augmentant le M, la largeur (fréquentielle) du lobe principal diminue.



Les méthodes Hanning, Hamming, Blackman proposent d'autres méthodes de fenêtrage.

Bartlett : $w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{M} & 0 \leq n \leq M \\ 2 - \frac{2n}{M} & \frac{M}{2} \leq n \leq M \end{cases}$

Hanning : $w(n) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)\right] \quad 0 \leq n \leq M$

Hamming : $w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) \quad 0 \leq n \leq M$

Blackman : $w(n) = 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0.08\cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) \quad 0 \leq n \leq M$

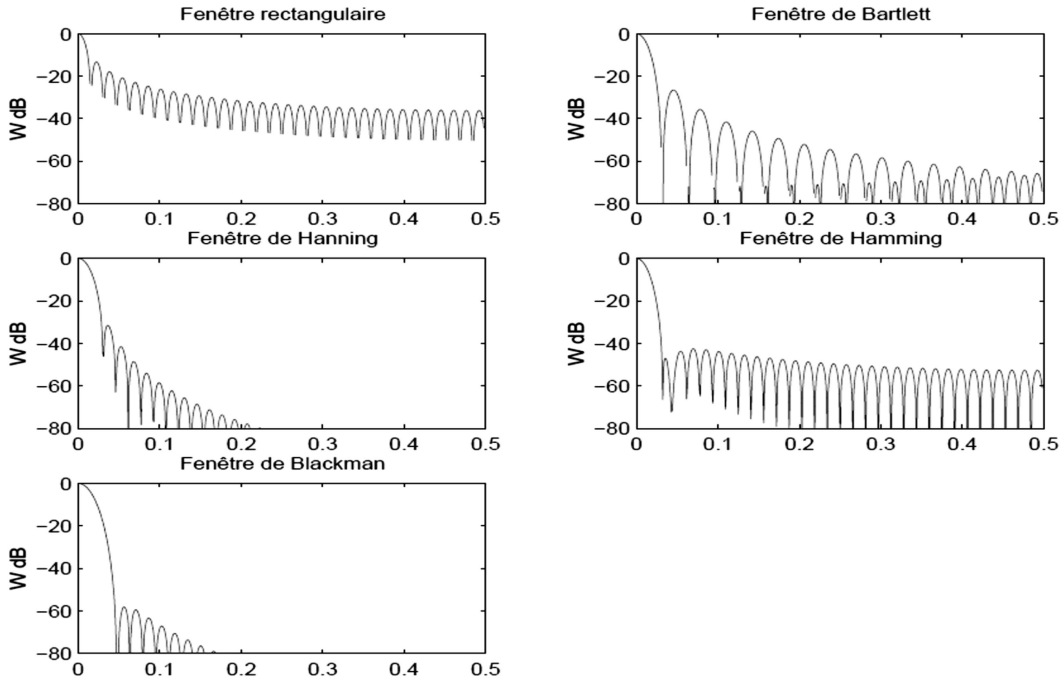
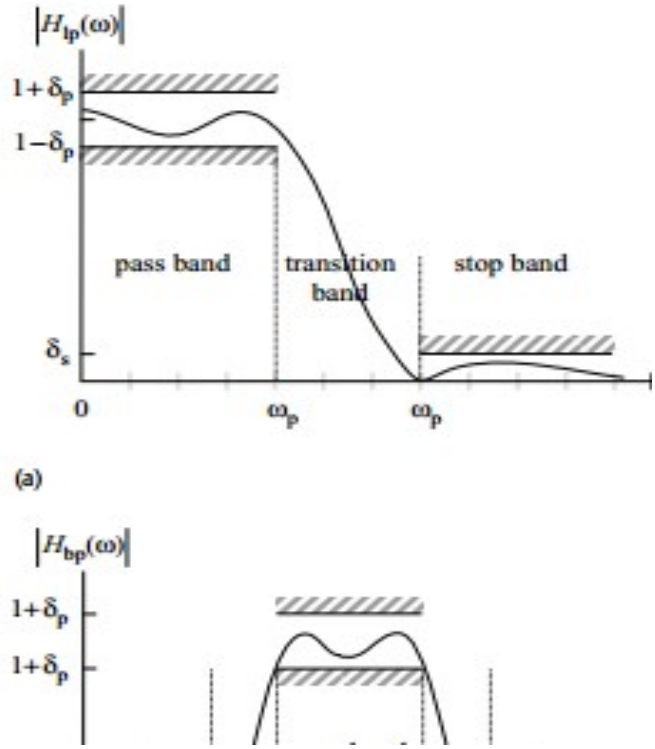


FIGURE 3.4 – Réponses fréquentielles des principales fenêtres



3.5. Conception des filtres RIF par la méthode de l'échantillonnage fréquentiel :