Universite Djilali Bounaama
Faculte des Sciences et
de la Technologie
Departement de Technologie

SERIE D'EXERCICES N° 2 avec correction

Matière : Traitement Numérique du Signal

« Les Filtres Numériques »

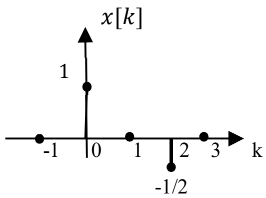
M1 - Systèmes de télécommunications

Exercice 1 : *La fonction de transfert d'un filtre numérique a deux pôles en z = 0, et deux zéros en z = −1 et z = 1.*

(1) *Déterminer la fonction de transfert H(z).*
(2) *En déduire l'équation aux différences du filtre.*
(3) *Déterminer la réponse impulsionnelle du filtre*
(4) *Tracer le diagramme des pôles et des zéros. Le filtre est-il stable. Justifier.*
(5) *Préciser le type de filtres numériques : RIF ou IIR.*

Exercice 2 : *Soit un système à temps discret défini par l'équation aux différences suivante :* $y[k] = a^2\, y[k-2] + x[k]$.

(1) *Calculer* $H(z)$ *sa fonction de transfert. Sous quelles conditions ce système est il stable? Justifier votre réponse.*
(2) *Ce système est à réponse impulsionnelle Finie « RIF » ou à Réponse Impulsionnelle Infinie « RII » ? Justifier votre réponse.*
(3) *Calculer sa réponse impulsionnelle* $h[k]$ *. Donner les valeurs de* $h[k]$ *pour* $k = 0, \dots, 5$ *lorsque* $a^2 = 0.5$, *tracer* $h[k]$ *.*
(4) *trouver la sortie de ce système, lorsque l'entrée* $x[k]$ *est donnée par la figure ci-contre.*



Exercice 3 : *L'entrée d'un système linéaire discret et invariant dans le temps est :* $x[k] = 5u[k]$. *Dans ce cas, la sortie du système vaut :* $y[k] = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^k + 3\left(-\frac{3}{4}\right)^k\right]u[k]$. *Avec* $u[k]$ *est l'échelon unité.*

(1) *Déterminer*$H(z)$, *la fonction de transfert du système. Quel est son domaine de convergence ?*
(2) *Tracer le diagramme des pôles et des zéros. Ce système est il stable ? Expliquer.*
(3) *Trouver* $h[k]$ *; la réponse impulsionnelle du système. Donner* $h[0]$ *et* $h[\infty]$.
(4) *Donner l'équation aux différences caractérisant le système.*

Exercice 4 : *La fonction de transfert d'un système LIT causal est :* $H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}}$

$l'entrée\ de\ ce\ systeme\ est\ donnée\ par\!:\ x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + u[-n-1]$

1. *Déterminer* $h[n]$ *la réponse impulsionnelle de ce système .*
2. *Déterminer la sortie* $y[n]$
3. *Déterminer les transformée en z des fonctions suivantes :*
   a. $x(n) = u(n) - u(n-3)$
   b. $x(n) = \alpha^n(u(n) - u(n-3))$
   c. $x(n) = \alpha^n u(n) - \alpha^{n-3}u(n-3))$
   d. $x(n) = \begin{cases} n+1 & : 0 \le n \le 2 \\ 5-n & : 2 < n \le 4 \\ 0 & : n < 0\ et\ n > 4 \end{cases}$

Exercice 5 : *Soit un filtre numérique d'entrée* $x(n)$ *et de sortie* $y(n)$, *tel que* $y(n) = x(n) - 2x(n-1) + 2\rho\cos\theta\, y(n-1) - \rho^2 y(n-2)$, $\rho \in R_+^*$

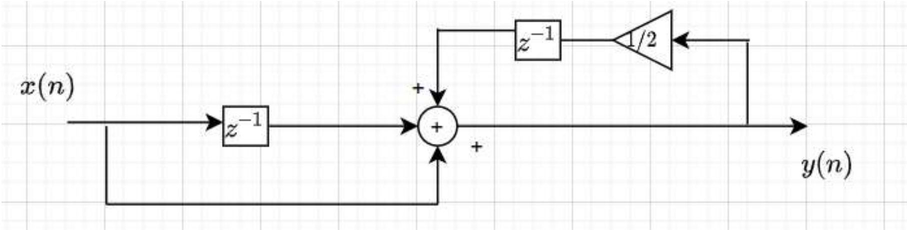
(1) *Dessiner la structure du filtre. Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ?*

(2) *Calculer la fonction de transfert $H(z)$du filtre.*

(3) *iii) Quels sont les pôles et les zéros du filtre ? A quelle condition le filtre est-il stable ? Dessiner le diagramme pôles-zéros dans le cas où $\rho = 0.8$ et $\theta = \pi/4$.*

(4) *Trouver le module de la réponse fréquentielle $|H(\omega)|$.*

Exercice 6 : *Déterminer la réponse impulsionnelle $h[n]$ du système*



Exercice 7 : *Calculer les TZ I de :*

1. $X(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.25\ \ {}^{-1}}$
2. $X(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.25\ \ {}^{-2}}$
3. $X(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-0.75)}$
4. $X(z) = \frac{1}{(z-0.5)^2}$

Solution de série n°2:

THE z-TRANSFORM

Table 4-1 Common z-Transform Pairs

Sequence	z-Transform	Region of Convergence
$\delta(n)$	1	all z
$\alpha^n u(n)$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\|z\| > \|\alpha\|$
$-\alpha^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\|z\| < \|\alpha\|$
$n\alpha^n u(n)$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\|z\| > \|\alpha\|$
$-n\alpha^n u(-n-1)$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\|z\| < \|\alpha\|$
$\cos(n\omega_0)u(n)$	$\frac{1-(\cos\omega_0)z^{-1}}{1-2(\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$\sin(n\omega_0)u(n)$	$\frac{(\sin\omega_0)z^{-1}}{1-2(\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$

Exercice1 : Deux pôles et deux zéros

Les pôles : $p = 0, p = 0$
Les zéros : $z = -1, z = 1$

1. Détermination de la fonction de transfert $H(z)$

$$H(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{z^2} = \frac{z^2(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{z^2} = (1-z^{-1})(1+z^{-1})$$

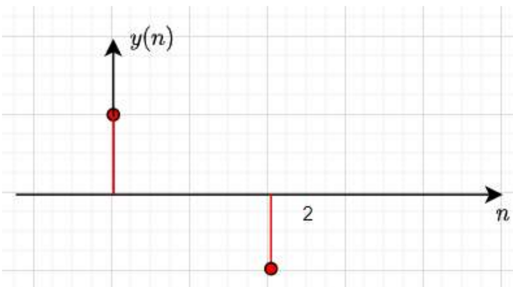
2. L'équation aux différence du filtre : $y(n) = ?$

$$h(n) = \frac{y(n)}{x(n)}$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = (1-z^{-1})(1+z^{-1})$$
$$\Rightarrow Y(z) = X(z)(1-z^{-1})(1+z^{-1}) = X(z)(1+z^{-1}-z^{-1}-z^{-2})$$
$$Y(z) = X(z)(1-z^{-2}) = X(z) - z^{-2}X(z)$$
$$\Rightarrow y(n) = x(n) - x(n-2)$$

3. Détermination de la réponse impulsionnelle du filtre :

Réponse impulsionnelle $\Rightarrow x(n) = \delta(n)$

$$y(n) = \delta(n) - \delta(n-2)$$



4. Diagramme des pôles et zéros :

Le système est stable car ses pôles sont à l'intérieur du cercle unité.

5. Type du filtre :

Ce filtre est du type RIF car la réponse est non récursive :

$$y(n) = x(n) - x(n-2)$$

De la forme : $y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$
De la réponse impulsionnelle : le filtre est causal qui est toujours stable.

Exercice2 : $y[k] = a^2\, y[k-2] + x[k]$

1. Donc de la forme : $y(n) = a^2\, y(n-2) + x(n)$

$$Y(z) = a^2\, z^{-2} Y(z) + X(z)$$
$$Y(z)(1 - a^2\, z^{-2}) = X(z) \Longrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - a^2 z^{-2}}$$

$z^2 = a^2 \;\Longrightarrow$ *Ce système est stable pour* $a < \pm 1$, pour les pôles soient à l'intérieur du cercle unité.

$$z = \pm a^2$$

2. Ce système est RII car ce filtre est récursif et les $a_n \neq 0$

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-n}}{1 - \sum_{k}^{N} a_k z^{-n}}$$

$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - a^2}$ ce système a deux pôles : $z = \pm a$ et deux zéros : $z = 0$

3. Réponse impulsionnelle :

$$x(n) = \delta(n)$$

$$y(n) = a^2 y(n-2) + \delta(n)$$
$$n = 0, \dots, 5 \; avec \; a^2 = 0.5 \Rightarrow y(5) = 0.5y(n-5) + \delta(n)$$
$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - a^2} = \frac{1}{1 - a^2 z^{-2}} = \frac{1}{1 - 0.5z^{-2}}$$
$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - 0.5} = \frac{z}{(z - 0.25)(z + 0.25)} = \frac{A}{z - 0.25} + \frac{B}{z + 0.25}$$

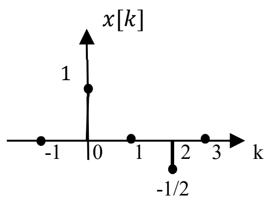
Par identification on trouve : $A = 2 \; et \; B = -2$

$$H(z) = 2\frac{z}{z - 0.25} - 2\frac{z}{z + 0.25}$$
$$h(n) = 2(0.25)^n u(n) - 2(-0.25)^n u(n)$$

$$h(0) = 2u(0) - 2u(0) = 0$$

$$h(1) = 2(0.25) - 2(-0.25) = 1$$
$$h(2) = 2(0.25)^2 - 2(-0.25)^2 = 0$$
$$h(3) = 2(0.25)^3 - 2(-0.25)^3 = 0.0625$$
$$h(4) = 2(0.25)^4 - 2(-0.25)^4 = 0; h(5) = 0; h(6) = 0; h(7) = 0$$

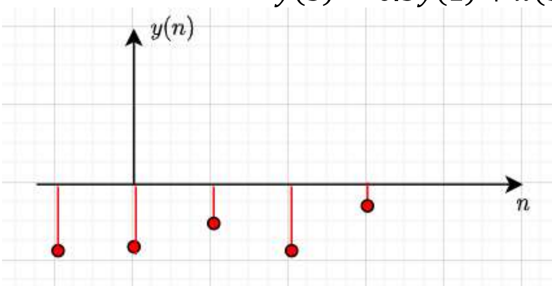
4. $x(k) = x(n) = [-1\; 1\; 0 - 0.5\; 0]$



$y(k) = 0.5y(k-2) + x(k)$
Si $y(-2) = 0; y(-1) = 0; y(-3) = 0 \; et \; y(-4) = 0$

$$y(-2) = 0.5y(-4) + x(-2) = 0$$

$$y(-1) = 0.5y(-3) + x(-1) = -1$$
$$y(0) = 0.5y(-2) + x(0) = -1$$
$$y(1) = 0.5y(-1) + x(1) = -0.5$$
$$y(2) = 0.5y(0) + x(2) = -\frac{3}{2}$$
$$y(3) = 0.5y(1) + x(3) = -0.25$$



Exercice3 : $x(k) = 5u(k)$

$$y(k) = [2\left(\frac{1}{2}\right)^k + 3\left(\frac{-3}{4}\right)^k]u(k)$$

1. $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$x(k) = 5u(k)$ *en transformée en z* $X(z) = \frac{5}{1-z^{-1}}$ $|z| > 1$

$y(k) = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^k + 3\left(-\frac{3}{4}\right)^k\right]u(k)$ en transformée en z on trouve :

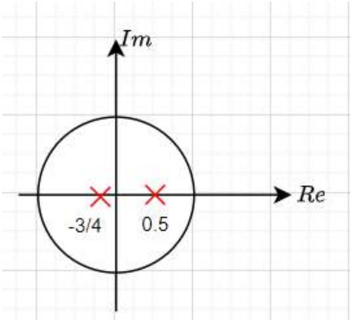
$Y(z) = 2\frac{1}{1-0.5z^{-1}} + 3\frac{1}{1+\frac{3}{4}z^{-1}}$ $\quad |z| > 0.5$ *et* $|z| > \frac{3}{4}$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{2}{1-0.5z^{-1}} + \frac{3}{1+\frac{3}{4}z^{-1}}}{\frac{5}{1-z^{-1}}}$$

$$H(z) = \left[\frac{2}{1-0.5z^{-1}} + \frac{3}{1+\frac{3}{4}z^{-1}}\right]\frac{1}{5}(1-z^{-1}) = \frac{z(z-1)}{(z-0.5)(z+\frac{3}{4})} \quad |z| > \frac{3}{4}$$

2. Ce système contient deux zéros : $z = 0$ *et* $z = 1$

Et deux pôles : $p = 0.5\ et\ p = -\frac{3}{4}$ qui sont à l'intérieur du RDC de cercle unité donc le système est stable.



3. $H(z) = \frac{z(z-1)}{(z-0.5)\left(z+\frac{3}{4}\right)} \Rightarrow h(n) = ?$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{(z-1)}{(z-0.5)\left(z+\frac{3}{4}\right)} = \frac{A}{(z-0.5)} + \frac{B}{\left(z+\frac{3}{4}\right)}$$

Par identification on trouve : $A = -\frac{2}{5}\ et\ B = \frac{7}{5}$

$$H(z) = (-\frac{2}{5})\frac{z}{(z-0.5)} + \left(\frac{7}{5}\right)\frac{z}{\left(z+\frac{3}{4}\right)}$$

$$h(n) = (-\frac{2}{5})(0.5)^n u(n) + \left(\frac{7}{5}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)^n u(n)$$

$$h(0) = -\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = 1$$

$$h(\infty) \to 0$$

4. L'équation aux différences caractérisant le système :

$$H(z) = \frac{z(z-1)}{(z-0.5)\left(z+\frac{3}{4}\right)} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z)((z-0.5)\left(z+\frac{3}{4}\right)) = X(z)(z-1)z$$

$$Y(z)(z^2 + \frac{1}{4}z - \frac{3}{8}) = X(z)(z^2 - z)$$

$$Y(z)z^2 + \frac{1}{4}zY(z) - \frac{3}{8}Y(z) = X(z)z^2 - X(z)$$

$$\frac{3}{8}Y(z) = Y(z)z^2 + \frac{1}{4}zY(z) - X(z)z^2 + X(z)$$

$$Y(z) = \frac{8}{3}\left(Y(z)z^2 + \frac{1}{4}zY(z) - X(z)z^2 + X(z)\right)$$

$$Y(z) = \frac{8}{3}Y(z)z^2 + \frac{2}{3}zY(z) - \frac{8}{3}X(z)z^2 + \frac{8}{3}X(z)$$

$$y(n) = \frac{8}{3}y(n-2) + \frac{2}{3}y(n-1) - \frac{8}{3}x(n-2) + \frac{8}{3}x(n)$$

Exercice 4: $H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}}$

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + u[-n-1]$$

1. la réponse impulsionnelle de ce système $h[n]$:

$$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}} = \frac{1}{1+\frac{3}{4}z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}}$$

$$h(n) = \left(-\frac{3}{4}\right)^n u(n) - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} u(n-1)$$

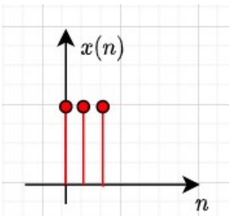
2. La sortie $y(n) = ?$

$$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z) = -\frac{3}{4}z^{-1}Y(z) + X(z) - z^{-1}X(z)$$

$$y(n) = -\frac{3}{4}y(n-1) + x(n) - x(n-1)$$

3. a. $X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$



b. $X(z) = 1 + \alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}$

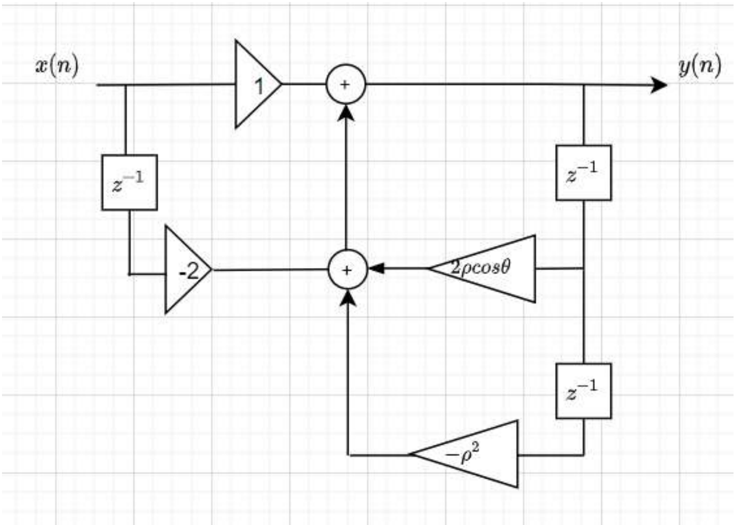
c. $X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} - \frac{z^{-3}}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{1-z^{-3}}{1-\alpha z^{-1}}$

d. On utilise : $z^{-1}X(z) \rightarrow x(n-1)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}$$

Exercice 5 :

1.Structure du filtre :



Ce filtre est récursif à réponse impulsionnelle infinie.

2. Fonction de transfert $H(z)\ du\ filtre$:

Transformée en z de l'équation aux récurence(différences) :

$Y(z) = X(z) - 2TZ[x(n-1)] + 2\rho cos\theta TZ(y(n-1)] - \rho^2 TZ[y(n-2)]$ (linéarité de la TZ)

$$Y(z) = X(z) - 2z^{-1}X(z) + 2\rho cos\theta z^{-1}Y(z) - \rho^2 z^{-2}Y(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-2z^{-1}}{1-2\rho cos\theta z^{-1} + \rho^2 z^{-2}}$$

3.les pôles et les zéros du filtre :

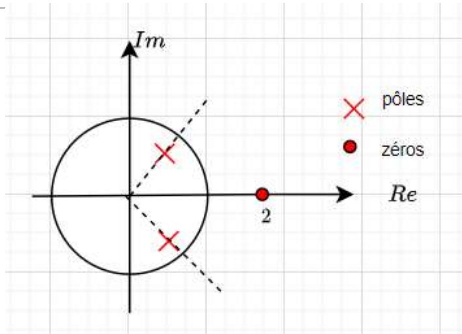
un zéros : $z = 2$

Pôles : discriminent du déniominateur :

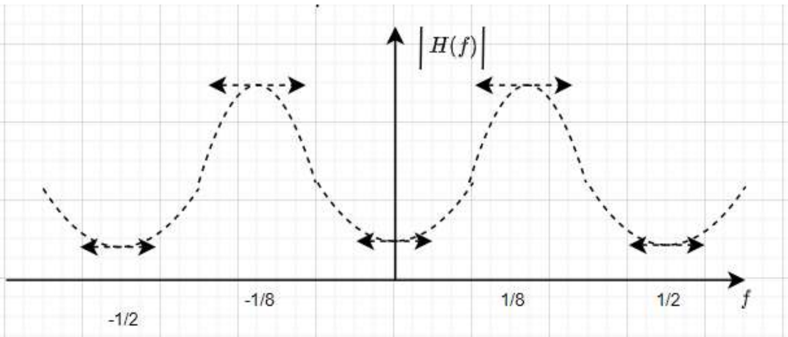
$$\Delta = 4\rho^2 cos^2\theta - 4\rho^2 = -4\rho^2 sin^2\theta$$

Pôles $=\frac{2\rho cos\theta \pm j2\rho sin\theta}{2} = \rho e^{\pm j\theta}$

Le filtre est stable ssi $\rho < 1$



4.



Exercice 6 :

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} + \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

$$h(n) = (0.5)^n u(n) + (0.5)^{n-1}u(n-1)$$
$$= \begin{cases} 1 : n = 0 \\ (0.5)^n + (0.5)^{n-1}, n > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 : n = 0 \\ 3(0.5)^n, n > 0 \end{cases}$$

Exercice 7 :

1. $X(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.25z^{-1}}$

$$x(n) = (0.25)^n u(n) - 0.5(0.25)^{n-1}u(n-1) = 2\delta(n) - (0.25)^n u(n)$$

2. $X(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.25z^{-2}}$

$$X(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1+0.5z^{-1})} = \frac{1}{(1+0.5z^{-1})}$$
$$x(n) = (-0.5)^n u(n)$$

3. $X(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-0.75)}$

$$\rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-0.5)(z-0.75)} = \frac{A}{z-0.5} + \frac{B}{z-0.75} = \frac{-2}{z-0.5} + \frac{3}{z-0.75}$$

$$x(n) = -2(0.5)^n u(n) + 3(0.75)^n u(n)$$

4. $X(z) = \frac{1}{(z-0.5)^2} = \frac{1}{(z-0.5)(z-0.5)}$

$$on\ a : nx(n) \rightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$$

$$(\frac{1}{(z-0.5)})' = -\frac{1}{(z-0.5)^2}$$

$$\left(\frac{1}{(z-0.5)}\right) \rightarrow (0.5)^{n-1}u(n-1)$$

$$\left(\frac{z}{(z-0.5)^2}\right) \rightarrow n(0.5)^{n-1}u(n-1)$$

$$\left(\frac{1}{(z-0.5)^2}\right) \rightarrow x(n) = (n-1)(0.5)^{n-2}u(n-2)$$