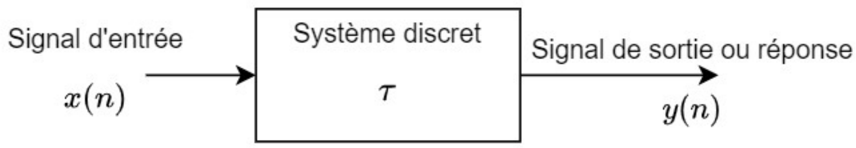
Chapitre 2 : les filtres numériques

2.1. Les systèmes discrets linéaires et invariants :

Un système discret est une entité qui réalise la conversion d'une suite discrète {x(n)} en entrée en une autre suite discrète {y(n)} en sortie.



Notation :

$$y(n) = \tau[x(n)] \qquad \text{II.1}$$

2.1.1. Classification des systèmes :

- Système statique ou sans mémoire :
  L'échantillon de sortie $y(n)$ à l'instant n ne dépend que de l'échantillon de l'entrée $x(n)$au même instant.
- Système dynamique ou avec mémoire :
  L'échantillon y(n) est fonction des échantillons de l'entrée aux instants antérieurs ou égaux à n et/ou des échantillons de sortie antérieurs à l'instant n

a) Linéarité :

Si $x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\ alors\ y(n) = a_1\tau[x_1(n)] + a_2\tau[x_2(n)]$ II.2

b) Causalité :

La réponse $y(n)$du système à l'instant n=k0 ne dépend que des entrées $x(n)$aux instants $n \leq k_0$

c) Invariance temporelle :

$$Si\ y(n) = \tau[x(n)]\ alors\ \ y(n - n_0) = \tau[x(n - n_0)] \qquad \text{II.3}$$

Exemple :

- $y(n) = x(n) - x(n - 1)$ est un système invariant
- $y(n) = nx(n)$ un système variant

d) Stabilité :

$$x(n) < M_x \Longrightarrow y(n) = \tau[x(n)] < M_y \forall\ n \in \mathbb{Z}$$

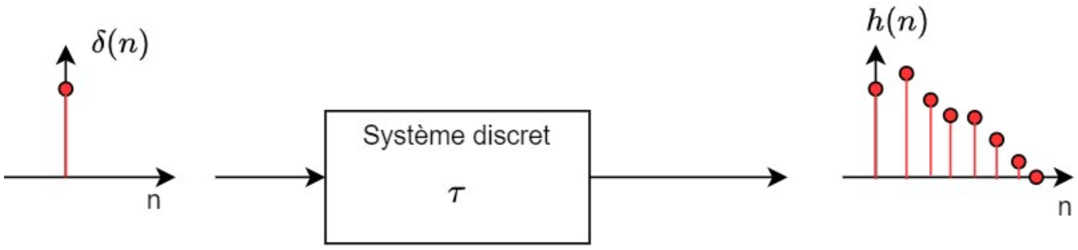
2.2. Convolution linéaire de signaux discrets :

Signal causal :

Si $x(n) = 0\ et\ h(n) = 0\ pour\ n < 0$ alors $x(n)\ et\ h(n)$ sont des signaux causaux.

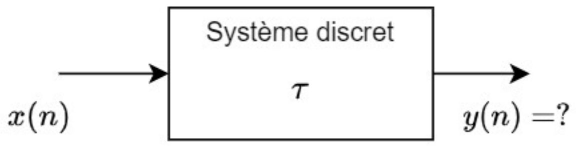
2.3. Système linéaire invariant discret :

La réponse impulsionnelle d'un système discret est sa réponse à une entrée sous forme d'impulsion de Dirac. $h(n) = \tau[\delta(n)]$



La réponse impulsionnelle permet de définir la caractérisation complète du système, et permet de calculer la sortie du système discret pour des signaux d'entrée quelconques en utilisant la convolution linéaire de signaux discrets.

Application de la convolution linéaire :



- Décomposition du signal discret $x(n)$:

$$x(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)\delta(n-k)$$

- Réponse du système :
  $y(n) = \tau[x(n)] \Longrightarrow y(n) = \tau[\sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)\ \delta(n-k)]$ II.4
- Propriété de linéarité du système discret :

$y(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)\, \tau[\ \delta(n-k)]$ l'opérateur $\tau[.]$ agit sur les termes dépendant de la variable temporelle n.

2.4. Convolution linéaire de signaux discrets

On appelle produit de convolution linéaire de deux signaux discrets $x(n)$et $h(n)$, l'expression

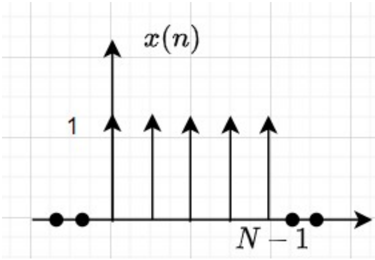
$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \qquad \text{II.5}$$

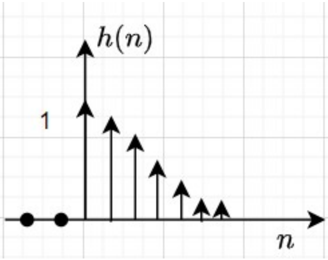
Cas de signaux causaux ($x(n) = 0, h(n) = 0$ pour n < 0)

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)h(n-k) \qquad \text{II.6}$$

Exemple :

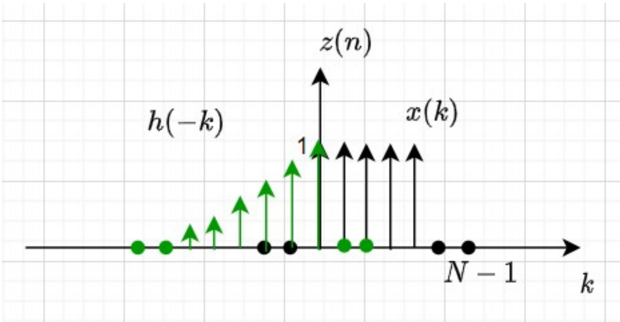
Calculer le produit de convolution linéaire des signaux suivants :





$$h(n) = a\Gamma(\mathrm{n})\ avec\ 0 < a < 1$$

Posons $z(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)h(n-k)$ II.7

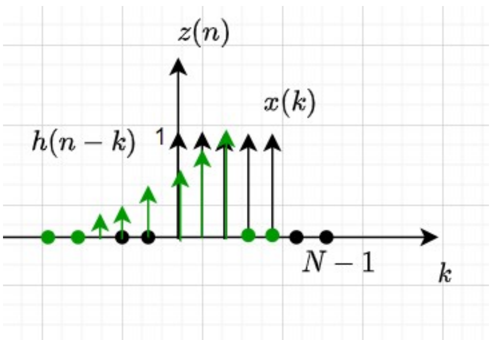


Il y a 3 cas :

1er cas : $n < 0$

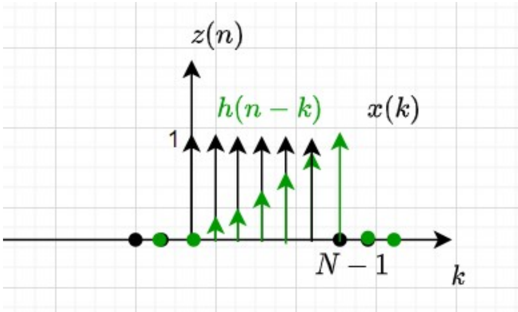
$x(k)$ et $h(n-k)$ n'ont pas d'échantillons non nuls en commun alors $z(n) = 0$

2ème cas :$0 \leq n < N - 1$



$z(n) = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}$ qui représente une suite géométrique de premier terme a^n et de $\frac{1}{a}$ raison, ce qui donne $z(n) = a^n \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}} = \frac{a^{(n+1)}-1}{a-1}$ II.8

3ème cas :$n \geq N - 1$



$z(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k} = a^n \frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}}$ II.9

Propriétés :

Commutativité : $x(n) * h(n) = x(n) * h(n)$ II.10

Associativité : $x(n) * h(n) * z(n) = x(n) * \big(h(n) * z(n)\big) = \big(x(n) * h(n)\big) * z(n)$ II.11

Distributivité par rapport à l'addition : $h(n) * \big(x(n) + z(n)\big) = h(n) * x(n) + h(n) * z(n) = \big(x(n) * h(n)\big) * z(n)$ II.12

Elément neutre du produit de convolution : impulsion de Dirac :

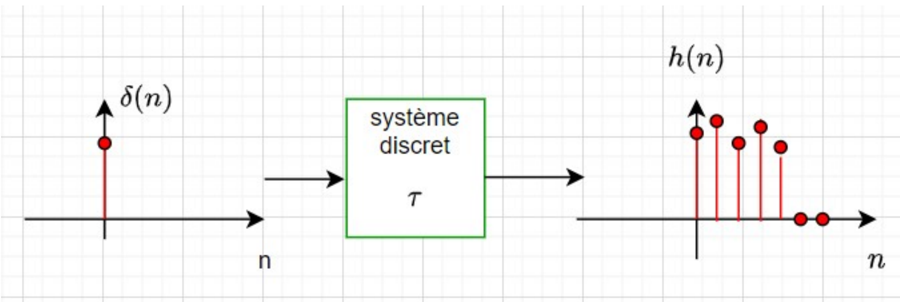
$x(n) * \delta(n) = x(n)$ II.13

Durée d'un signal issu du produit de convolution linéaire :

Si $x(n)$est de durée N_1et $h(n)$ est de durée N_2 alors $x(n) * h(n)$ est de durée $N_{1+}N_2 - 1$

2.5. Réponse impulsionnelle :

La réponse impulsionnelle d'un système discret est sa réponse à une entrée sous forme d'impulsion de Dirac



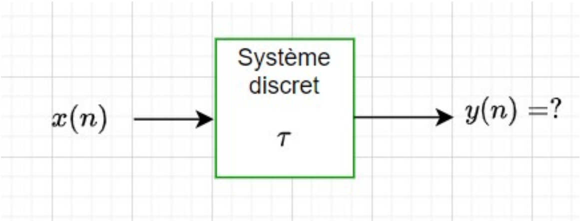
$h(n) = \tau[\delta(n)]$ II.14

Avantages de la réponse impulsionnelle

- Caractérisation complète du système

- permet de calculer la sortie du système discret pour des signaux d'entrée quelconques en utilisant la convolution linéaire de signaux discrets

2.6. Application de la convolution linéaire



Décomposition du signal discret $x(n)$: $x(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\delta(n-k)$ II.15

Réponse du système : $y(n) = \tau[x(n)] \Longrightarrow y(n) = \tau[\sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\delta(n-k)]$ II.16

Propriété de linéarité du système discret : $y(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\tau\,[\delta(n-k)]$

L'opérateur T [.] agit sur les termes dépendant de la variable temporelle n

Propriété d'invariance temporelle du système : $\tau[\delta(n-k)] = h(n-k)$ qui est la réponse impulsionnelle décalée

Ce qui donne : $y(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n)$ II.17

Donc : La réponse d'un système discret linéaire invariant à une entrée quelconque x(n) est la convolution linéaire de x(n) avec la réponse impulsionnelle h(n) du système.

- ### Stabilité et réponse impulsionnelle

Un système linéaire discret invariant est stable ssi sa réponse impulsionnelle est absolument sommable : $\sum_{n\epsilon\mathbb{Z}} |h(n)| < +\infty$

- ### Causalité et réponse impulsionnelle

Un système linéaire discret invariant est causal ssi sa réponse impulsionnelle h(n) est causale :

$$h(n) = 0 \ \forall n < 0$$

- ### Equation aux différences linéaire à coefficients constants :

$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$ II.18

On peut donc en déduire $y(n) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} x(n-r)$ II.19

Avantages :

- Calcul de la sortie du système sans connaissance de la réponse impulsionnelle h(n)

- Calcul de la sortie y(n) à partir des N sorties décalées y(n−k), des M entrées décalées x(n−r) et de l'entrée courante x(n). Mais ceci nécessite la connaissance des conditions initiales du système
- Quelle que soit la longueur de la réponse impulsionnelle h(n) (finie ou infinie), le nombre d'opérations nécessaires au calcul de y(n) est fini (comparativement au calcul par convolution linéaire)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \;\; avec\; a_0 = 1 \qquad \text{II.20}$$

- $N = 0$ alors
  $y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$ II.21
- ➢ $y(n)$ dépend de l'entrée courante $x(n)$ et des$M$ entrées précédentes $x(n-r)$
- ➢ Système à réponse non récursive
- ➢ La réponse impulsionnelle est finie $h(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r \delta(n-r)$

On parle de système à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

- $N \geq 1$alors :
  $y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, y(n-k) + \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$ II.22
- ➢ y(n) dépend de l'entrée courante $x(n)$, des M entrées précédentes $x(n-r)$ mais aussi des N sorties précédentes $y(n-k)$
- ➢ Système à réponse récursive
- ➢ Système à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)

2.7. Réponse fréquentielle

$$Y(f) = H(f).X(f) \qquad \text{II.23}$$

$H(f)$:TFTD de la réponse impulsionnelle ou fonction de transfert du système discret

Où en peut en calculer le module et l'argument :

$|H(f)|$est le spectre d'amplitude

$\phi(f) = \arg(H(f))$ qui représente le spectre de phase

2.8. Transformée en z (TZ)

La TZ est la généralisation de la TFTD. Soit un signal discret $x(n)$. Sa TZ est définie par :

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n}$ avec $z \in \mathbb{C}$

Rappel : $X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).e^{-j2\pi nf}$ II.24

Condition d'existence de la TZ

La transformée existe si la série converge. L'ensemble des valeurs de la variable complexe z pour lesquelles la série converge est appelée Région De Convergence (RDC)

$RDC = \{z \in \mathbb{C} / \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n) z^{-n}| < +\infty\}$

Exemple :

Calculer la TZ de $x(n) = \Gamma(n)$

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1. z^{-n} = lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}$ II.25

$X(z) = lim_{N \to +\infty} \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$ la limite est finie si $|z^{-1}| < 1$

Donc $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ pour $|z| > 1$

2.9. Propriétés de la transformée en Z :

Soit $x(n)$, un signal discret. Soit $X(z)$ sa TZ avec la RDC : $r_1 \leq |z| \leq r_2$

- Linéarité :

$ax(n) + by(n) \to aX(z) + bY(z)$ II.26

le RDC est au moins l'intersection de la RDC de $X(z)$ et de la RDC de $Y(z)$

- Changement d'échelle en z

$a^n x(n) \to X(\frac{z}{a})$ II.27

RDC : $|a| r_1 \leq |z| \leq |a| r_2$

- Décalage temporel

  $x(n - n_0) \to z^{-n_0} X(z)$ II.28

  La RDC est identique à l'exception de restrictions éventuelles en $z = 0 \; et \; z = \infty$

- Dérivation en z

$nx(n) \to -z \frac{dX(z)}{dz}$ II.29

La RDC est identique à l'exception de restrictions éventuelles en $z = 0 \; et \; z = \infty$

- Retournement du temps

$x(-n) = X(z^{-1})$ II.30

DRC : $\frac{1}{r_2} \leq |z| \leq \frac{1}{r_1}$

- Théorème de la valeur finale

$lim_{n\to+\infty}\, x(n) = lim_{z\to 1} X(z)$ II.31

- Produit de convolution

$x(n) * y(n) = X(z).Y(z)$ II.32

La RDC est au moins l'intersection de la RDC de $X(z)$et de la RDC de $Y(z)$

2.10. Transformée en z inverse

L'intégral de Cauchy $x(n) = \frac{1}{j2\pi}\oint_C \ X(z)z^{n-1}dz$ II.33

2.11. TZ et Transformée de Fourier à Temps Discret (TFTD)

Hypothèse : on suppose que le cercle unité ($|z| = 1$) ∈ RDC de $X(z)$. On restreint le calcul de $X(z)$ au cercle unité en posant $z = e^{j2\pi f}$

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi f} \ \ = X(f) \to X(f) = X(z)]_{z=j2\pi f}$ II.34

$(|z| = 1) \in RDC$

Finalement : La transformée de Fourier à temps discret (TFTD) d'un signal est sa transformée en z évaluée sur le cercle unité

2.12. Caractérisation par la réponse impulsionnelle

$h(n)$: réponse impulsionnelle du système

$y(n) = h(n) * x(n) \to Y(z) = X(z).H(z)$ II.35

2.13. Caractérisation par une équation aux récurrences

Equation aux récurrences :
$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$ II.36

En utilisant la propriété de décalage temporel de la TZ, on a :

$(\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k})Y(z) = (\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r})X(z)$ II.37

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}$: la fonction de transfert $H(z)$ a la forme d'une fraction rationnelle : $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$

$N(z)$ *et* $D(z)$ sont des polynômes en z^{-1}de degrés respectifs Mpour les entrées et N pour les sorties.

$N(z)$:Zéros d'un système discret, les zéros sont les racines du polynôme N(z).

$D(z)$: Pôles d'un système discret, Les pôles sont les racines λ_i du polynôme D(z)

Remarque : $H(z)$ diverge ($H(z) \to \infty$) pour $z = \lambda_i \Longrightarrow \lambda_i \notin$ RDC de $H(z)$

2.14. Fonction de transfert H(z) et stabilité d'un système discret causal

- Causalité : Le système est causal ssi la RDC de H(z) est l'extérieur d'un disque ⇒ λi ∈ au disque
- Stabilité : Un système linéaire discret est stable ssi sa FT H(z) converge sur le cercle unité

Conclusion :

Un système discret linéaire et causal est stable ssi tous les pôles de H(z) sont à l'intérieur du cercle unité.