

المحددات وجمل المعادلات الخطية

A مصفوفة مربعة. نسمي **محدد** A ، ونرمز له بـ $\det A$ محدد عائلة أشعة الأعمدة بالنسبة للأساس القانوني

$$\det A = |a| = a \quad A = (a) \quad / a \in \mathbb{R} \quad \text{محدد من الرتبة 1: } \mathbb{K}^n$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21}) \quad \text{محدد من الرتبة 2:}$$

محدد من الرتبة 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{21} \cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{21} \cdot a_{31}) + a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$$

نشر محدد مصفوفة

في المصفوفة المربعة $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ni A = (a_{ij})$ ، إذا رمزنا بـ A_{ij} للمصفوفة الناتجة عن حذف السطر i والعمود j في المصفوفة A ، محدد A هو: $\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} a_{1k} \cdot \det A_{1k}$: نشر أو تحليل محدد A على السطر الأول.

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij} \quad j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \text{يمكن نشر } \det A \text{ على السطر } i \text{ كما يلي:}$$

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij} \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \text{كما يمكن نشر } \det A \text{ على العمود } j \text{ كما يلي:}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{أنشر } \det A \text{ على العمود الأول، حيث}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

- في مصفوفة مربعة A من الرتبة n ، تكون: A قابلة للقلب $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
- إذا أضفنا إلى أي عمود عبارة خطية لأعمدة أخرى، فإن قيمة المحدد لا تتغير.
- إذا تساوي عمودان أو كان أحد الأعمدة معدوماً، أو أحد الأعمدة هو عبارة خطية لأعمدة أخرى في مصفوفة A ، فإن $\det A = 0$.

$$\det A = \det {}^t A \quad \text{و} \quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det A \quad \text{حيث } \lambda \neq 0.$$

$$\det A \cdot \det B = \det A \times \det B \quad (B \text{ هي أيضا مصفوفة مربعة من الرتبة } n).$$

$$\text{إذا كانت } A \text{ قابلة للقلب، أي وجدت } A^{-1} \text{، فإن } \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad (\text{لأن } \det I_n = 1)$$

- للتبسيط، نضع المصفوفة المربعة A من النمط 3 بشكل ثلاثة أسطر كالاتي $A = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix}$ ، ونتحقق من الخواص:

$$\det \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \lambda \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix} \quad / \lambda \neq 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \ell_3 \\ \ell_2 \\ \ell_1 \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 + \ell'_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell'_3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \ell_1 + \alpha \ell_2 + \beta \ell_3 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

حساب مقلوب مصفوفة باستخدام المحددات

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n} \text{ مصفوفة حيث}$$

إذا كان $\det A \neq 0$ فإن A قابلة للقلب أي أن المصفوفة A^{-1} موجودة.

نعتبر المصفوفة المجاورة لـ A المعرفة كالآتي : $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$ حيث $a_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$

$$C = A \tilde{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & A & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{1} & A \end{pmatrix} \quad \text{بالتجريب نحصل:}$$

$$C = (c_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n} \text{ حيث } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \tilde{a}_{kj} \quad \text{فنعوض}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot (-1)^{i+j} \det A_{jk}$$

$$c_{ij} = \begin{cases} \det A & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i \neq j \end{cases} \quad , \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \tilde{A} \right) = \left(\frac{1}{\det A} \tilde{A} \right) \cdot A = I_n \text{ ومنه } A \cdot \tilde{A} = \det A \cdot I_n \text{ ومنه } C = \det A \cdot I_n \text{ وهذا يعني بأن}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \tilde{A} \text{ أي أن } A \text{ قابلة للقلب ومقلوبها هو:}$$

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji} \text{ و } A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n} : A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A} \text{ إذن كانت } A \text{ قابلة للقلب فإن مقلوبها هو}$$

$$\bullet \text{ في المصفوفة: } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \text{ يكون لدينا } \det B = 2(-4) - (1)(3) = -11 \text{ . ومنه } B \text{ قابلة للقلب .}$$

$${}^t \tilde{B} = \begin{pmatrix} +(-4) & -(3) \\ -(1) & +(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$${}^t(\tilde{B}) = \tilde{B} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

ومنه

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \tilde{B} = \frac{1}{(-11)} \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/11 & 1/11 \\ 3/11 & -2/11 \end{pmatrix}$$

$${}^t\tilde{A} = \begin{pmatrix} -5 & -14 & 13 \\ -6 & -5 & -8 \\ 14 & -8 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \det A = -59 \quad : \quad \text{يكون لدينا} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \bullet \text{ في المصفوفة}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A} = -\frac{1}{59} \begin{pmatrix} -5 & -6 & 13 \\ -14 & -5 & -8 \\ 13 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

استخدام المحددات في الجمل الخطية

يمكن التعبير عن المعادلة : $A \cdot X = B$ مصفوفيا بالشكل $A \cdot X = B$ ، أي

$$(*) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

حيث A مصفوفة المعاملات و X مصفوفة عمود المتغيرات. و B مصفوفة الثوابت،

إذا كانت A قابلة للقلب فإن : $X = A^{-1} \cdot B$ $\Leftrightarrow A \cdot X = B$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ومنه حل المعادلة (*):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

• في المعادلة

$$A \cdot X = B : \text{ فنحصل على } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{نضع}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{بالحساب نجد } \det A = 4 \text{ والمصفوفة } A \text{ قابلة للقلب ومقلوبها هو} :$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ومنه يكون الحل :

[illegible]

Gauss خوارزمية

- نبدل (إن تطلب الأمر) أسطر الجملة بحيث يكون معامل المجهول الأول في المعادلة الأولى (السطر الأول) غير معدوم. يسمى هذا المعامل بعنصر الارتكاز Pivot .

- نعدم المجهول الأول في بقية المعادلات، عددها $(n-1)$ باستخدام التحويل :

$$(i > 1) \quad \ell_i \longrightarrow a_{i1} \ell_i + a_{i1} \ell_1$$

- نجري نفس العمل السابق من أجل الجملة ذات $(n-1)$ مجهول و $(n-1)$ معادلة الناتجة من حذف السطر الأول والعمود الأول .

ملاحظة: في أثناء الحساب إذا - ظهر سطر يمثل المعادلة $0x_1 + \dots + 0x_n = 0$ نحذف هذا السطر ونواصل العمل.

- وُجد سطر من الشكل $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid b_k)$ $b_k \neq 0$ فإن الجملة لا تقبل حل.

1. حل، باستخدام الحساب المصفوفي، جملة المعادلات ذات المجاهيل x و y و z الآتية :

$$(a \text{ و } b \text{ وسيطان حقيقيان}) \quad (I) \quad \begin{cases} x - 2z = a \\ y + z = b \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

واستنتج أن المصفوفة A المرفقة بالجملة (I) هي مصفوفة قابلة للقلب .

2. حل الجملة (I)، باستخدام العمليات الأولية على الأسطر.

1. حل جملة المعادلات (I) :

$$\textbf{(I)} \iff A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

ومنه تكون المصفوفة A قابلة للقلب، والجملة تقبل حلا وحيدا :

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b \\ y = \frac{2}{5}a + \frac{4}{5}b \\ z = -\frac{2}{5}a + \frac{1}{5}b \end{cases}$$

2. حل الجملة (I) باستخدام العمليات الأولية على الأسطر .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -4 & 2a \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -5 & 2a-b \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = a \\ y + z = b \\ -5z = 2a - b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b \\ y = \frac{2}{5}a + \frac{4}{5}b \\ z = -\frac{2}{5}a + \frac{1}{5}b \end{cases} \quad \text{ومنه الحل الوحيد :}$$

جملة Cramer

جملة Cramer هي جملة معادلات خطية من n مجهول و n معادلة، هذه الجملة تقبل حل وحيد.

يمكن التعبير عن هذه الجملة بكتابة المصفوفة $A.X = B$ / $\det A \neq 0$

هذه الجملة تقبل حلا وحيدا : $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

إذا رمزنا بـ A_i للمصفوفة الناتجة من تبديل العمود رقم i بشعاع العمود B ($i = 1, 2, \dots, n$) ، سيكون لدينا:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad / (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{المكافئة لـ} \quad \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2x + 6y - z = 0 \\ x - 2y + 2z = 3 \end{cases} \quad \text{في الجملة}$$

لدينا $\det A = 10$ ، ومنه الجملة تقبل الحل الوحيد (x, y, z) حيث :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{17}{5}, \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-16}{10}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-8}{10}$$