

التطبيقات الخطية

تعريف

ليكن E و F ف.ش على $\mathbb{R}$ ، نسمي تطبيق خطي، التطبيق $F: E \rightarrow F$ الذي يحقق:

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in K, \quad f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

ينتج من هذا التعريف :

$$f(0_E) = 0_F$$

$$\forall x \in E, \quad f(-x) = -f(x)$$

مثلا الدوال القابلة للاشتقاق بالاستمرار تألف ف.ش، بحيث تكون فيه عملية الاشتقاق تطبيق خطي داخلي.

- ليكن E ف.ش على K ، ولتكن $x_1, x_2, \dots, x_p$ أشعة من E . التطبيق $f: K^p \rightarrow E$ المعروف من أجل كل $(a_1, \dots, a_p)$ من K^p بالشكل : $f(a_1, \dots, a_p) = a_1 x_1 + \dots + a_p x_p$ هو أيضا تطبيق خطي .

أمثلة

- التطبيق f المعروف كما يلي :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (2x - y, x, -x + y)$$

هو تطبيق خطي .

بالفعل ، إذا كان $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$.

$$f[(x, y) + (x', y')] \stackrel{?}{=} f(x, y) + f(x', y') \quad \text{نبرهن}$$

$$\begin{aligned} f[(x, y) + (x', y')] &= f(x + x', y + y') = \\ &= (2(x + x') - (y + y'), x + x', (x + x') + (y + y')) \\ &= (2x - y, z, x + y) + (2x' - y', x', x' + y') \\ &= f(x, y) + f(x', y') \end{aligned}$$

وإذا كان $\lambda \in \mathbb{R}$ و $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(\lambda(x, y)) \stackrel{?}{=} \lambda f(x, y) \quad \text{نبرهن}$$

$$\begin{aligned} f[\lambda(x, y)] &= f(\lambda x, \lambda y) = \\ &= (2\lambda x - \lambda y, \lambda x, \lambda x + \lambda y) \\ &= \lambda(2x - y, x, x + y) = \lambda f(x, y) \end{aligned}$$

ومنه f تطبيق خطي .

تمرين محلول

في الفضاء $\mathbb{R}^3$ المزود بالأساس القانوني $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ ، نعتبر الأشعة :

$$v_1 = -e_1 - e_2 + 2e_3, \quad v_2 = e_1 + 2e_2 + e_3, \quad v_3 = e_1 - e_2$$

1. أدرس الاستقلال الخطي لـ v_1, v_2, v_3 ، واستنتج بعد الفضاء $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

2. عين صورة شعاع كيني (x, y, z) من $\mathbb{R}^3$ بالتطبيق الخطي h . حيث :

$$h(e_1) = v_1, \quad h(e_2) = v_2, \quad h(e_3) = v_3$$

3. عين مجموعة الأشعة (x, y, z) من $\mathbb{R}^3$ التي تحقق : $h(x, y, z) + 2(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

الحل

لدينا الأشعة : $v_1 = (-1, -1, 2)$, $v_2 = (1, 2, 1)$, $v_3 = (1, -1, 0)$

1. دراسة الاستقلال الخطي للأشعة v_1, v_2, v_3 ، والفضاء $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow$$

$$\alpha(-1, -1, 2) + \beta(1, 2, 1) + \gamma(1, -1, 0) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

والأشعة v_1, v_2, v_3 مستقلة خطيا. ومنه $\dim V = 3$

2. حساب $h(x, y, z)$ من $\mathbb{R}^3$ بالتطبيق الخطي h :

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= h(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xh(e_1) + yh(e_2) + zh(e_3) \\ &= x(-1, -1, 2) + y(1, 2, 1) + z(1, -1, 0) \end{aligned}$$

$$h(x, y, z) = (-x + y + z, -x + 2y - z, 2x + y) \quad \text{ومنه}$$

3. الأشعة (x, y, z) من $\mathbb{R}^3$: $h(x, y, z) + 2(x, y, z) = (0, 0, 0)$

$$h(x, y, z) + 2(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$(-x + y + z, -x + 2y - z, 2x + y) + 2(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$(x + y + z, -x + 4y - z, 2x + y + 2z) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 4y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \wedge x = -z$$

$$\ker(h + 2 \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle (1, 0, -1) \rangle$$

فضاء التطبيقات الخطية

E, F فضاءين منتهيين البعد .

مجموعة كل التطبيقات الخطية من E في F والذي نرمز له بالرمز $\mathcal{L}(E, F)$ هو فضاء شعاعي على K

بالعمليتين $+$, $\times$ المعرفتين كما يلي :

$$\forall x \in E, (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad : f + g \quad \text{المجموع}$$

$$\forall \lambda \in K, \forall x \in E, (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad : \lambda f \quad \text{الجداء}$$

إذا كان E و F منتهيين البعد فإن $\mathcal{L}(E, F)$ منته البعد. ويكون $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$

حالة خاصة: عندما $F = \mathbb{R}$ ، يسمى الفضاء $\ell(E, F)$ بالفضاء الثنوي dual الذي يرمز له E^* .

$$f \in E^* \Leftrightarrow f: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ تطبيق خطي}$$

إذا كان E منتهي البعد فإن E^* منته البعد. ويكون $\dim E^* = \dim E$

تركيب تطبيقين خطيين

وإذا كان $u: E \rightarrow E'$ و $v: E' \rightarrow E''$ تطبيقين خطيين، فإن التركيب $v \circ u: E \rightarrow E''$ هو تطبيق خطي.

ولدينا المخطط :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{u} & E' & \xrightarrow{v} & E'' \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & v \circ u & & \end{array}$$

$$\text{حيث } \forall x \in E \quad (v \circ u)(x) = v(u(x))$$

تمرين محلولة

f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^3$ معرف في الأساس القانوني $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ ، بالشكل :

$$f(e_3) = (2, 2, 6) \quad , \quad f(e_2) = (3, 4, 3) \quad , \quad f(e_1) = (8, 1, 1)$$

ليكن $u = x e_1 + y e_2 + z e_3$ شعاعاً من $\mathbb{R}^3$. احسب $f(u)$ و $(f \circ f)(u)$.

الحل

ليكن $u = (x, y, z)$ شعاعاً من $\mathbb{R}^3$. نحسب $f(x, y, z)$ و $(f \circ f)(u)$:

$$f(u) = f(x, y, z) = x(8, 1, 1) + y(3, 4, 3) + z(2, 2, 6)$$

$$f(x, y, z) = (8x + 3y + 2z, x + 4y + 2z, x + 3y + 6z)$$

$$(f \circ f)(u) = f(f(x, y, z)) = f(\underbrace{(8x + 3y + 2z)}_{x'}, \underbrace{(x + 4y + 2z)}_{y'}, \underbrace{(x + 3y + 6z)}_{z'})$$

$$f^2(x, y, z) = f(x', y', z') = (8x' + 3y' + 2z', x' + 4y' + 2z', x' + 3y' + 6z')$$

$$f^2(x, y, z) = (69x + 42y + 34z, 14x + 25y + 22z, 17x + 33y + 44z)$$

قضية

- E و F ف.ش على $\mathbb{R}$ ، $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ أساس لـ E إذا كانت $w_1, w_2, \dots, w_n$ أشعة من F ،

فإنه يوجد تطبيق خطي وحيد $f: E \rightarrow F$ يحقق: $f(v_i) = w_i \quad \forall i$

- E و F ف.ش على $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \dim E = \dim F$ يوجد تشاكل خطي f (تقابلي وخطي) بين E و F .

- وإذا كان F ف.ش على K و $\dim E = n$ ، فإنه يوجد تشاكل خطي بين E و $\mathbb{R}^n$.

- إذا كان f ت. ش تشاكل فإن f^{-1} هو أيضاً تشاكل.

صورة شعاع بتطبيق خطي

يكون f تطبيق خطي من E في F إذا كانت صورة أي شعاع من الشكل $u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ من E هي :

$$f(u) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$$

أي الصورة $f(E)$ هي الفضاء الجزئي المولد بـ $f(e_1), \dots, f(e_n)$.

مثلا في الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ ، نعتبر التطبيق $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ المعروف بصور أشعة أساسه كما يلي :

$$f(e_1) = (1, 1), f(e_2) = (3, -1), f(e_3) = (1, 0)$$

التطبيق f تعرف تماما . لأنه إذا كان $(x, y, z) = x e_1 + y e_2 + z e_3$ من $\mathbb{R}^3$ فإنه يكون :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x e_1 + y e_2 + z e_3) = x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) \\ &= x(1, 1) + y(3, -1) + z(1, 0) = (x + 3y + z, x - y) \end{aligned}$$

$$f = \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

ومنه التطبيق :

$$(x, y, z) \mapsto (x + 3y + z, x - y)$$

• إذا كانت الأشعة $x_1, \dots, x_n$ أشعة مرتبطة في E فإن صورها $f(x_1), \dots, f(x_n)$ تكون أيضا مرتبطة في F .

بالفعل إذا كانت الأشعة $x_1, \dots, x_n$ من E مرتبطة، فإنه توجد سلميات $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ليست كلها معدومة ، أي

يوجد على الأقل λ_{i_0} غير معدوم $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$: $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E$.

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) = f(0_E) = 0_F \quad \text{إذن}$$

العبارة المعدومة $\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) = f(0_E) = 0_F$ تحققت مع وجود أحد المعاملات غير معدوم ($\lambda_{i_0} \neq 0$)

عموما، عكس هذه القضية، غير صحيح، إلا إذا كان f متباينا.

صورة فضاء جزئي بتطبيق خطي

$$E \xrightarrow{f} F \quad \text{تطبيق خطي}$$

إذا كان E' فضاء شعاعي جزئي من E فإن $f(E')$ فضاء شعاعي جزئي من F .

$$f(E') = \{ f(x) \mid x \in E' \}$$

وإذا كان $E = E'$ فإن $f(E)$ يسمى صورة التطبيق الخطي f نرمز له $\text{Im } f = f(E)$

$$= \{ y \in F : y = f(x) \mid x \in E \}$$

ملاحظة f غامر إذا $\text{Im } f = F$

فضاء الصورة العكسية

$$f: E \rightarrow F \quad \text{تطبيق خطي.}$$

إذا كان F' فضاء شعاعي من F فإن $f^{-1}(F')$ فضاء شعاعي جزئي من E .

$$x \in f^{-1}(F') \Leftrightarrow f(x) \in F' \quad \text{لدينا:}$$

وعندما $F' = \{0_F\}$ ، يُسمى الفضاء الشعاعي الجزئي $f^{-1}\{0\}$ نواة التطبيق f ونرمز له بالرمز $\ker f$.

$$\begin{aligned}\ker f &= f^{-1}(\{0_F\}) = f^{-1}(0_F) \\ &= \{x \in E : f(x) \in \{0_F\}\} \\ &= \{x \in E : f(x) = 0_F\}\end{aligned}$$

تمرين محلول

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

نعتبر التطبيق الخطي

$$(x, y) \mapsto (2x - y, x + y, x)$$

تعيين $\ker f$ و $\text{Im } f$

$$\begin{aligned}\ker f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\ \ker f \ni (x, y) &= (2x - y, x + y, x) = (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow x = y = 0\end{aligned}$$

$$\cdot \ker f = \{(0, 0)\} \text{ ومنه}$$

$$\begin{aligned}\text{Im } f &= \langle f(e_1), f(e_2) \rangle \\ f(e_1) &= (1, 0) = (2, 1, 1) \\ f(e_2) &= (0, 1) = (-1, 1, 0) \\ \text{Im } f &= \langle (2, 1, 1), (-1, 1, 0) \rangle\end{aligned}$$

3.4 التفكيك القانوني لتطبيق خطي

E و F فضاءين شعاعيين على K منتهيي البعد، و $f : E \rightarrow F$ تطبيق خطي.

$\ker f$ فضاء شعاعي جزئي على E و $\text{Im } f$ فضاء شعاعي جزئي على F .

$E/\ker f$ فضاء شعاعي على K :

ينتج من كون :

$$j \in \mathcal{L}(E, E/\ker f) \text{ تطبيق خطي غامر قانوني (من تعريف حاصل القسمة)}$$

$$\pi \in \mathcal{L}(\text{Im } f, F) \text{ تطبيق خطي متباين قانوني (لأن } F \supset \text{Im } f \text{)}$$

أن $f \in \mathcal{L}(E/\ker f, \text{Im } f)$ تشاكل خطي . (يتم بإثبات أن التطبيق $f : \bar{x} \mapsto f(x)$ خطي ومتباين وغامر)

ومنه مخطط تركيب هذه التطبيقات :

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{j} & E/\ker f & \xrightarrow{f} & \text{Im } f & \xrightarrow{\pi} & F \\ & & \searrow & \nearrow & & & \\ & & f & & & & \end{array}$$

التطبيق الخطي f يتفكك إلى $f = \pi \circ f \circ j$ أي $f = \pi \circ f \circ j$

$$E \ni x \mapsto f(x) = (\pi \circ f \circ j)(x) = \pi(f(j(x))) \in F$$

حالتان خاصتان

- f غامر (أي في حالة $F = \text{Im } f$) $\Leftrightarrow$ يوجد تشاكل ما بين F و $E/\ker f$ رمزيا : $E/\ker f \approx F$
- f متباين (أي في حالة $E \equiv \text{Im } f$) $\Leftrightarrow$ يوجد تشاكل ما بين E و $\text{Im } f$ رمزيا : $E \approx \text{Im } f$

بعد فضاء حاصل القسمة

إذا كان E فضاء شعاعيا على K ، منته البعد، و F فضاء شعاعي جزئي من E . فإن:

$$\dim E/\ker f = \dim E - \dim \ker f$$

نتيجة (نظرية البعد)

E و F فضاءين شعاعيين على K و $f: E \rightarrow F$ تطبيق خطي.

إذا كان الفضاء E منته البعد، فإن $\dim E = \dim \ker f + \text{rg } f$.

مثال

$\{e_1, e_2\}$ و $\{u_1, u_2, u_3\}$ الأساسان القانونيان لـ $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ على الترتيب.

f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$ بحيث: $f(x, y, z) = (-x + 2y + z, x - 2y - z)$

الفضاء الجزئي $\ker f$:

الأشعة (x, y, z) من $\ker f$ تحقق: $f(x, y, z) = (0, 0)$

$$(-x + 2y + z, x - 2y - z) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - 2y - z = 0$$

$$\Leftrightarrow z = x - 2y$$

إذن الشعاع (x, y, z) من $\ker f$ يأخذ الشكل:

$$(x, y, x - 2y) = x \underbrace{(1, 0, 1)}_a + y \underbrace{(0, 1, -2)}_b$$

والفضاء $\ker f$ مولد بالشعاعين المستقلين a و b ، أي $\ker f = \langle (1, 0, 1); (0, 1, -2) \rangle$.

الفضاء الجزئي $\text{Im } f$:

الصورة $(w_1, w_2) = f(x, y, z)$ تنتمي إلى فضاء الصورة $(\mathbb{R}^2)$ ، ومنه:

$$(w_1, w_2) = (-x + 2y + z, x - 2y - z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = -x + 2y + z \\ w_2 = x - 2y - z \end{cases} \Leftrightarrow w_1 + w_2 = 0 \Leftrightarrow w_1 = -w_2$$

إذن صورة الشعاع (x, y, z) بالتطبيق f تأخذ الشكل:

$$(w_1, w_2) = (w_1, -w_1) = w_1 \underbrace{(1, -1)}_c$$

والفضاء $\text{Im } f$ مولد بالشعاع المستقل c ، أي $\text{Im } f = \langle (1, -1) \rangle$.

ومنه صحة العلاقة: $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f + \text{rg } f = 2 + 1 = 3$

بعد مجموع فضائين شعاعيين

E فضاء شعاعي منته البعد، F و G ف.ش.ج من E . نعلم بأن $F \cap G$ و $F + G$ فضائين جزئيين من E

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \quad \text{إن}$$

تمرين محلول

نعتبر الفضائين الجزئيين الإضافيين: $F = \langle (2,1,0), (0,1,1) \rangle$ و $G = \langle (1,1,1) \rangle$ في $\mathbb{R}^3$.

ونعرف التطبيق الخطي f بالشكل :

$$f : \mathbb{R}^3 = F \oplus G \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$u = u_1 + u_2 \mapsto u_1 \quad (u_1 \in F, u_2 \in G)$$

ليكن (x, y, z) من $\mathbb{R}^3$. عبر عن $f(x, y, z)$ بدلالة x و y و z .

الحل

$$F + G \ni u = (x, y, z) = u_1 + u_2 = \underbrace{\alpha(2,1,0) + \beta(0,1,1)}_{u_1} + \underbrace{\delta(1,1,1)}_{u_2} \quad \text{لدينا}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (2\alpha + \delta, \alpha + \beta + \delta, \beta + \delta) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \delta = x \\ \alpha + \beta + \delta = y \\ \beta + \delta = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha + \delta, \alpha + \beta + \delta, \beta + \delta) = (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = y - z \\ \beta = -x + 2y - z \\ \gamma = x - 2y + 2z \end{cases}$$

$$f(x, y, z) = (y - z)(2, 1, 0) + (-x + 2y - z)(0, 1, 1) \quad \text{ومنه}$$

$$f(x, y, z) = (2y - 2z, -x + 3y - 2z, -x + 2y - z) \quad \text{وأخيرا}$$