Cours d'analyse 04 N° 15

Les intégrales multiples : Intégrales Triples

التكاملات الثلاثية

L'etude des intégrales triples est analogue à celle des intégrales doubles donc on va donner brièvement les resultats.

Définition de l'intégrale triple sur un parallélépipède.

On reprend la définition de l'intégrale double sur un rectangle et on remplace $(s_{i+1}-s_i)(t_{j+1}-t_j)$ par

$(s_{i+1}-s_i)(t_{j+1}-t_j)(h_{k+1}-h_k)$ et on note par

$\iiint_{\Omega} f \, dx\,dy\,dz$ l'intégrale triple de la fct

$f(x,y,z)$ sur le domaine D.

Calcule pratique des intégrales triples :

Théorème de Fubini : soit f une fonction définie de $D \subsetneq \mathbb{R}^3$ à valeur ds $\mathbb{R}$ i.e

$f : D \subsetneq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tq D est donné par

$$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 , \quad a \leq x \leq b, \ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$
$$g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y) \}$$

Où $a, b \in \mathbb{R}$, $\varphi_1 \varphi_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fcts continues par morceaux telle que $\varphi_1 \leq \varphi_2$

et $g_1\ g_2 : D_0 \longrightarrow \mathbb{R}$. ~~con~~ deux fcts continues par morceaux sur D_0 et $g_1 \leq g_2$

où $D_0 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$

Alors si on suppose que f est continue sur D

f est intégrable sur D et on a

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy.\, dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx$$

Remarque : Le calcul de l'intégrale triple est ramené aux calculs successifs de trois intégrales simples

cas particulier si $D = [a,b] \times [c,d] \times [e,j]$

Alors $\iiint_D f(x,y,z)\, dx dy dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^j f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx$

et si $f(x,y,z) = f_1(x) \times f_2(y) \times f_3(z)$ alors

$$\iiint_\Omega f(x,y,z) = \left(\int_a^b f_1(x)\, dx \right) \times \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) \times \left(\int_e^j f_3(z)\, dz \right)$$

propriétés élémentaires de l'intégrale triple.

comme pour l'intégrale double et sous des hypothèses analogues on obtient :

- $$\iiint_D (\alpha f+\beta g)(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \alpha \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \beta \iiint_D g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

- $$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\overset{\circ}{D}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\bar{D}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

- le volume de D noté $V(D) = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz$.

- si $D = D_1 \cup D_2$ avec $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ou $V(D_1 \cap D_2) = 0$

  alors $$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \iiint_{D_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

- $f \geq 0$ sur $D \Rightarrow \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \geq 0$.

- $f \leq g$ sur $D \Rightarrow \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \leq \iiint_D g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

- $$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \leq V(D) \times \sup_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)$$

• si $f \geq 0$ et si $D_1 \subseteq D_2$ alors

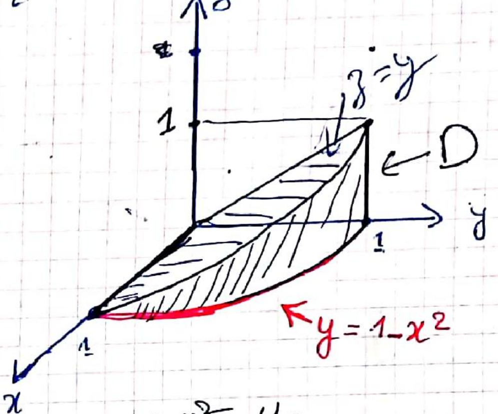
$$\iiint_{D_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \leq \iiint_{D_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

• $$\left| \iiint_{D} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \right| \leq \iiint_{D} |f(x,y,z)|\,dx\,dy\,dz$$

Exemple : calculer $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ où

$f(x,y,z) = xyz$ et $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

$z \leq y,\ x^2 + y \leq 1\}$



On a $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} \left(\int_0^{y} xyz\,dz \right) dy \right) dx$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} \frac{1}{2} x y^3\,dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x \left(\frac{(1-x^2)^4}{4} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{80} (1-x^2)^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{80}.$$

Changement de variables dans une intégrale triple

soit D et Δ deux ensemble reguliers de $\mathbb{R}^3$
$(x,y,z) \in D$ et $(u,v,w) \in \Delta$.

Déf : on désignera par changement de variables de Δ dans D toute application

$$\Phi : \Delta \longrightarrow D$$
$$(u,v,w) \longmapsto \Phi(u,v,w) = \begin{pmatrix} x = P(u,v,w) \\ y = \varphi(u,v,w) \\ z = R(u,v,w) \end{pmatrix}$$

telle que :
1) Φ est bijective de Δ dans D
2) P, φ, R sont toutes des fcts de classe C^1 sur Δ
3) si on ecrit u, v, w en fonction de $(x,y,z) \in D$ à l'aide de Φ^{-1}, on obtient encore de fcts de classe C^1 sur D

Déf : on appelle matrice Jacobienne attachée au changement de variable Φ la matrice carrée d'ordre 3

$$J\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial P}{\partial v} & \frac{\partial P}{\partial w} \\ \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial v} & \frac{\partial q}{\partial w} \\ \frac{\partial R}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial w} \end{pmatrix}$$

et son determinant $\det J\Phi = \frac{\partial P}{\partial u} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial v} & \frac{\partial q}{\partial w} \\ \frac{\partial R}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial w} \end{vmatrix} - \frac{\partial P}{\partial v} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial w} \\ \frac{\partial R}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial w} \end{vmatrix}$

$$+ \frac{\partial P}{\partial w} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial v} \\ \frac{\partial R}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Théorème : soit Δ, D deux domaines bornés réguliers de $\mathbb{R}^3$, $\Phi : \Delta \longrightarrow D$ un changement de variables de Δ sur D, on suppose que la fct. $\det J\Phi = |J\Phi|$ reste bornée sur Δ.
On suppose que f st une fct continue sur $D = \Phi(\Delta)$
Alors la fct $f \circ \Phi(u,v,w)$ st intégrable sur Δ et on a :

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Delta f(P(u,v,w), q(u,v,w), R(u,v,w))\,|\det J\Phi|\,du\,dv\,dw$$

1) Cas particulier passage au coordonnées sylindriques

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(r,\theta,z) \longmapsto \Phi(r,\theta,z) = (x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

donc $|\det J\Phi| = |r| = r$ et la formule du changement de variable s'écrit alors :

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz.$$

2) Cas particulier passage en coordonnées sphériques

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(r,\theta,\varphi) \longmapsto \Phi(r,\theta,\Phi) = (x,y,z) = (r\cos\theta\cos\theta, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

$$\det J_\Phi = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r^2\cos\varphi$$

et la formule du changement de variables s'écrit alors;

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\iiint_\Delta f(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r^2|\cos\varphi|\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

Exemple : Calculer $\iiint_D z^2\,dx\,dy\,dz$ où

$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$

1) on utilise le changement de variables défini par

$X=\frac{x}{a}$, $Y=\frac{y}{b}$, $Z=\frac{z}{c}$ alors $\Delta=\{(X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3$

$X^2+Y^2+Z^2\leq 1\}$ et $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$$= \iiint_\Delta f(X,Y,Z)\,|\det J_\Phi|\,dX\,dY\,dZ.$$

$$\iiint_{\Delta} f(x,y,z) \cdot abc \, dx\,dy\,dz$$

Car $\det J \Phi = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$

$$= \iiint_{\Delta} z^2 c^2 \cdot abc \, dx\,dy\,dz = \iiint_{\Delta} z^2 c^3 ab \, dx\,dy\,dz$$

et pour calculer cette intégrale on introduit les coordonnées sphériques alors notre intégrale devient

$$\iiint_{\Delta'} r^2 \sin^2\varphi \cdot c^3 \cdot ab \cdot r^2 |\cos\varphi| \, dr\,d\theta\,d\varphi$$

où $\Delta' = \{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 \quad 0 \leq r \leq 1, \, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$

$$= \iiint_{\Delta'} r^4 \sin^2\varphi \cos\varphi \cdot c^3 ab \, dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \left(\int_0^1 r^4 dr\right) \times \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \times \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} abc^3 \sin^2\varphi \cos\varphi \, d\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{5} \times 2\pi \times abc^3 \times \left(\frac{1}{3} \sin^3\varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{15} abc^3$$

Exemple 02 : calculer $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

on utilise les coordonnés sphériques et on note

$\Delta = \{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3,\ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$

on obtient $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$$= \iiint_\Delta f(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r^2 |\cos\varphi|\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \iiint_\Delta r^2 \Big(\cos^2\varphi\, \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1} + \sin^2\varphi\Big)\, r^2\, |\cos(\varphi)|\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \iiint_\Delta r^4 \cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \times \left(\int_0^1 r^4\, dr\right) \times \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi\right)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{4\pi}{5}$$

——— o ——— o ———