Série d'exercice N° 02

" Les extrema "

Exo. 01 solu :

1) $f(x,y) = \cos(x+y) + \sin y$ on a $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(x+y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin(x+y) + \cos y \end{cases}$

alors les pts stationnaires de la fct sont de la forme

$(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + h\pi\right)$ avec $k, h \in \mathbb{Z}$.

d'autre part comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\cos(x+y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\cos(x+y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\cos(x+y) - \sin y$

Alors $\Delta(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2$

$= \cos(\pi(1+h+k)) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + h\pi\right)$

$= (-1)^{h+k+1} \cdot (-1)^h = (-1)^{2h} \cdot (-1)^{k+1} = (-1)^{k+1}$

donc si k est pair alors $\Delta(x_0, y_0) = -1 < 0$

dans ce cas f n'admet pas un extremum en (x_0, y_0)

et comme si k est impair alors $\Delta(x_0, y_0) = 1 > 0$

et d'autre part on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = -\cos(\pi(1+h+k)) = (-1)^{h+k}$

donc si k est impair et h est impair alors
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = 1 > 0$ et donc f admet un minimum local en (x_0,y_0).

si k est impaire et h est pair alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = -1 < 0$ et donc f admet un maximum local en (x_0,y_0)

2) $f(x,y) = (x+y) + \cos(x+y) + \sin(x+y)$

on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + \cos(x+y) - \sin(x+y) = 2\cos^2\frac{x+y}{2} - 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

$= 2\cos\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2} - \sin\frac{x+y}{2}\right)$

$= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ donc les pts stationnaires sont $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tq $x_0+y_0 = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

ou $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tq $x_0+y_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

d'autre part on a $\Delta(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2\right)(x_0,y_0) = 0$, donc il n'est pas possible à priori de décider de leur nature.

On considère la fct g auxiliaire $g(t) = t + \cos t + \sin t$

on a g admet un minimum local en $t_0 = \pi + 2k\pi$
et un maximum local en $t_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\left(\begin{matrix} g' = 0 \\ g'' > 0 \end{matrix}\right)$

Ce qui nous permet de conclure que f admet un maximum local en (x_0, y_0) si $x_0 + y_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

et un minimum local en (x_0, y_0) si $x_0 + y_0 = \pi + 2k\pi$.

3) $f(x,y) = x^3 - 3x + xy^2$

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3 + y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$

Alors les pts stationnaires sont

$(0, \sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$, $(1,0)$ et $(-1,0)$

d'autre part on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y$,

alors $\Delta(0, \sqrt{3}) = -12$, $\Delta(0, -\sqrt{3}) = -12$

$\Delta(1,0) = 12$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 6 > 0$

et $\Delta(-1,0) = +12 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = -6 < 0$

par conséquent la fct f admet un pt col en $(0, \sqrt{3})$ et $(0, -\sqrt{3})$ et f admet un maximum local en $(-1,0)$ et un minimum local en $(1,0)$.

4) $f(x,y) = 12xy - x^2y - y^2x$.

On a $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(12 - 2x - y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(12 - x - y) \end{cases}$

et donc les points stationnaires sont

$(0,0)$, $(0,12)$, $(12,0)$, $(4,4)$.

et comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 12 - 2x - 2y$

alors $\Delta(0,0) = -(12)^2 < 0$, $\Delta(0,12) = -12^2 < 0$

$\Delta(12,0) = -12^2 < 0$ alors les trois pts sont des pts col pour la fct f.

et $\Delta(4,4) = 48$ et comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,4) = -8 < 0$

alors f admet un maximum local en $(4,4)$

question !! le maximum local en $(4,4)$ est-il un maximum global ? non. car

$\lim_{x \to -\infty} f(x,x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^2(6-x) = +\infty$.

5) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ On a $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2}(x^2 y - 1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y^2}(xy^2 - 1) \end{cases}$

alors l'unique pt stationnaire de f est $(-1,1)$

et comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{x^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{2}{y^3}$

alors $\Delta(1,1) = 3 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) = 2 < 0$

alors f admet un minimum local en $(-1,1)$.

5 $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4(x-y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4(x-y)$ alors les pts critiques

sont $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

et comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 4$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4$, Alors $\Delta(0,0) = 0$

$\Delta(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 4^2 \cdot 2 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 20 > 0$

$\Delta(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = 4^2 \cdot 2 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\sqrt{2},\sqrt{2})\ 20 > 0$

alors $(0,0)$ est un pt col et f admet

un minimum local en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

———o———o———

en effet pour $(0,0)$ on a $f(x,y) - f(0,0)$

$= f(x,y)$ et $f(x,x) = 2x^4 \geq 0$

et $f(x,-x) = 2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 4)$

donc $f(x,-x) \leq 0$ si $x \in [-2,2]$ et $f(x,-x) \geq 0$

si $x \in]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$ alors $f(x,y) - f(0,0)$ change

le signe au voisinage de $(0,0)$.

EXO :- 2 : solu : $f(x,y) = y^2 + y\cos x - \sin x - 2$

puisque $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y\sin x - \cos x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + \cos x$

alors les pts stationnaires de f sont

$(x_0,y_0) = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0\right)$ ou $(x_0,y_0) = \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; 0\right)$ $k \in \mathbb{Z}$

et comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y\cos x + \sin x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\sin x$ alors

$\Delta\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0\right) = 1 > 0$ et $\Delta\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0\right) = -3 < 0$

et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0\right) = 1 > 0$ alors f admet un minimum local en $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0\right)$. et les pts $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0\right)$ sont des pts col de f.

EXO 03 solu $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 8(x-y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 8(x-y)$

les pts critique sont $(0,0)$, $(2,-2)$, $(-2,2)$

et comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 8$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 8$

et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -8$ donc $\Delta(0,0) = 8^2 - 8^2 = 0$

donc on ne peut rien dire a priori.

et comme $f(x,y)-f(0,0)=f(x,y)$

et $f(x,x)=2x^4\geq 0$ et $f(x,-x)=2x^4-16x^2$

$=2x^2(x^2-8)$ donc $f(x,-x)\geq 0$ si

$x\in]-\infty,-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},+\infty[$ et $f(x,-x)\leq 0$

si $x\in]-2\sqrt{2},2\sqrt{2}[$ donc

$f(x,y)-f(0,0)$ change le signe au voisinage de $(0,0)$ et donc f n'admet pas un extremum en $(0,0)$.

Exo 08 : solu : $f(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2+x+y+z}$

On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=(2x+1)f(x,y,z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=(2y+1)f(x,y,z)$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=(2z+1)f(x,y,z)$ alors l'unique pt critique de f est $(x_0,y_0,z_0)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

On a $f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)=e^{x^2+y^2+z^2+x+y+z}-e^{-\frac{3}{4}}$

$=e^{(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z+\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}}-e^{-\frac{3}{4}}$

$=e^{-\frac{3}{4}}\left(e^{(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z+\frac{1}{2})^2}-1\right)\geq 0$

$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^2$ car $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z+\frac{1}{2})^2\geq 0$

donc f admet un minimum en $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

Exo 06 solu $f(x,y) = x^2 + x\sin y - \frac{1}{4}\cos y + 5$.

comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + \sin y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos y + \frac{1}{4}\sin y$

alors les pts stationnaires de la fct sont $(x_0,y_0) = (0, k\pi)$

$(x_0', y_0') = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$, ou $(x_0'', y_0'') = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$

$k \in \mathbb{Z}$. d'autre part : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x\sin y + \frac{1}{4}\cos y$

alors $\Delta(0, k\pi) = \frac{(-1)^k}{2} - 1 < 0$ donc $(0, k\pi)$ est un pt col

et $\Delta\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{3}{4} > 0$, $\Delta\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{3}{4} > 0$

et comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0', y_0') = 2 > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0'', y_0'') = 2 > 0$

alors f admet un minimum local en chaque

pt (x_0', y_0') et (x_0'', y_0'').

Exo 07 solu :

1) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x + y = 1$

On pose $F(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$

On cherche les solutions du système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \\ x+y-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\lambda = 0 \\ 2y+\lambda = 0 \\ x+y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{2} \\ y = -\frac{\lambda}{2} \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

donc le pt critique du problème est $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

et comme $f(x, 1-x) - f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = x^2 + (1-x)^2 - \frac{1}{2}$

$$= 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

alors f admet un extremum lié en $\left(+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ qui est un minimum.

2) $f(x,y) = x^n + y^n$, $x+y = a$; $a \neq 0$

on pose $F(x,y) = x^n + y^n + \lambda(x+y-a)$

On cherche les solu du système suivant.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \\ x+y-a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n x^{n-1} + \lambda = 0 \\ n y^{n-1} + \lambda = 0 \quad \text{---} (*) \\ x+y = a \end{cases}$$

On distingue trois cas : si $n=0$, si $n=1$, si $n>1$

si $n = 0$ le problème devient déterminer les extrema du problème $\begin{cases} f(x,y) = 2 \\ x+y = a \end{cases}$

alors f admet un extremum qui est 2 aux pts $(x, a-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

si $n = 1$ le pb devient déterminer les extrema du pb $\begin{cases} f(x,y) = x+y \end{cases}$ et $x+y = a$

$x+y = a \Rightarrow f(x,y) = a$ alors f admet un extremum a aux pts $(x, a-x)$

si $n \neq 0 \wedge n \neq 1$ le système (*) $\Rightarrow \begin{cases} x^{n-1} = y^{n-1} \\ \lambda = -n y^{n-1} \\ x+y = a \end{cases}$

si n est pair $n-1$ est impair donc $x^{n-1} = y^{n-1} \Rightarrow x = y$

si n est impair $n-1$ est pair donc $x^{n-1} = y^{n-1} \Rightarrow x = y \vee x = -y$

alors $x = y \Rightarrow 2x = a \Rightarrow x = \frac{a}{2} = y$

$x = -y \Rightarrow -y + y = a \Rightarrow a = 0$ (alors pas de pt critique)

donc le seul pt critique du pb est $(x_0, y_0) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

On a $f(x, a-x) - f\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = x^n + (a-x)^n - 2\frac{a^n}{2^n} = g(x)$

et on a $g'(x) = n\left(x^{n-1} - (a-x)^{n-1}\right)$,

$g''(x) = n(n-1)\left(x^{n-2} + (a-x)^{n-2}\right)$

et comme $g'\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ et $g''\left(\frac{a}{2}\right) > 0$ ~~alors~~ si $a > 0$ alors

f admet un minimum lié en $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

Si $a < 0$ et n pair alors

$g''\left(\frac{a}{2}\right) = n(n-1) \cdot 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{n-2} > 0$ et donc f admet un minimum lie en $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

Si $a < 0$ et n impair alors

$g''\left(\frac{a}{2}\right) = n(n-1)2 \left(\frac{a}{2}\right)^{n-2} < 0$ et donc f admet un maximum lie en $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

3) $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$ sous la cdt $xyz = a^3$, $a \neq 0$.

On pose $F(x,y,z) = x^3+y^3+z^3+\lambda(xyz - a^3)$

on cherche les solu du système
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 0 \\ xyz - a^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + \lambda yz = 0 \\ 3y^2 + \lambda xz = 0 \\ 3z^2 + \lambda xy = 0 \\ xyz = a^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = y^3 = z^3 \\ xyz = a^3 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = a$$

alors (a,a,a) est un pt critique du pb.

et on $xyz = a^3 \Rightarrow z^3 = \frac{a^9}{y^3x^3}$ alors

$$f\left(x,y,\frac{a^3}{xy}\right) = \frac{a^9}{y^3x^3} + x^3+y^3 = g(x,y)$$

et on a $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - \frac{3a^9}{y^3x^4} \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = 6x + \frac{12a^9}{y^3x^5}$

et $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{+9a^9}{x^4y^4}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 6y + \frac{12a^9}{x^3y^5}$

et dos $\Delta(a,a) = \begin{vmatrix} 18a & 9a \\ 9a & 18a \end{vmatrix} = 4(9a)^2 - (9a)^2 > 0$

donc si $a > 0$ f admet un minimum lié en (a,a,a)

si $a < 0$ f admet un maximum lié en (a,a,a)

4) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ et $xyz = a^3$, $a \neq 0$

on a $F(x,y,z) = xy + xz + yz + \lambda(xyz - a^3)$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 0 \\ xyz = a^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z + \lambda yz = 0 \\ x + z + \lambda xz = 0 \\ y + x + \lambda xy = 0 \\ xyz = a^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = z \\ xyz = a^3 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = y = z = a$ alors (a, a, a) est un pt critique

Donc $xyz = a^3 \Rightarrow z = \frac{a^3}{xy} \Rightarrow f\left(x, y, \frac{a^3}{xy}\right) = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$

$= g(x,y)$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y - \frac{a^3}{x^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2a^3}{x^3}$

et $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2a^3}{y^3}$ alors

$$\Delta(a,a) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$ alors

f admet un minimum lié en (a, a, a).

——— o ——— o ———