1. تعاريف

الدفعة هي عبارة عن قسط أو مبلغ يدفع خلال فترة زمنية معينة، نسمي دفعات ثابتة تتابع تسديدات أو توظيفات خلال فترات متساوية المدة، يمكن أن تكون: سنوات، سداسيات، ثلاثيات أو أشهر...الخ.

تصنف الدفعات الثابتة حسب عدة معايير كما يلي:

- تنقسم الدفعات الثابتة حسب الهدف إلى دفعات سداد أو دفعات استهلاك تكون عادة في نهاية المدة و دفعات توظيف تكون في الغالب في بداية المدة.
- تنقسم الدفعات الثابتة حسب مدتها إلى دفعات مؤكدة تبدأ وتنتهي في تاريخ معين، دفعات دائمة تبدأ الدفعة في تاريخ معين ولا تنتهي كريع العقارات، دفعات دورية يكون عدد الدفعات محدد في العقود، دفعات مشروطة كما هو الحال عندما يتعلق الأمر بالدفعات المتحصل عليها من خلال تأمين على الحياة، حيث تنتهي عند وفاة الشخص.
- تنقسم الدفعات الثابتة حسب تاريخ بداية الدفع إلى دفعات فورية تدفع الأولى عند إمضاء العقد ودفعات مؤجلة تدفع في نهاية كل فترة على أن لا تبدأ إلا بعد فترة زمنية محددة كأن تدفع الأولى بعد أربع سنوات من تاريخ إمضاء العقد.

القيمة المكتسبة لمجموعة من الدفعات الثابتة هي مجموع القيم المكتسبة لهذه الدفعات.

القيمة الحالية لمجموعة من الدفعات الثابتة هي مجموع القيم الحالية لهذه الدفعات.

2. دفعات ثابتة في نهاية المدة

هي دفعات دورية تدفع بهدف تكوين رأسمال أو تسديد قرض بعد فترة معينة، المبالغ المدفوعة تكون متساوية و تكون في نهاية كل فترة، فتكون الدفعة الأولى في نهاية الفترة الأولى.

أ) القيمة المكتسبة لدفعات ثابتة في نهاية المدة

أ-1) حساب القيمة المكتسبة لدفعات ثابتة في نهاية المدة:

القيمة المكتسبة لمجموعة دفعات ثابتة في نهاية المدة هي مجموع القيم المكتسبة لهذه الدفعات، يتم حسابها كما يلي:

القيمة المكتسبة	الفترة	الدفعة
$(1+i)^{n-1}$	(n-1)	
$(1+i)^{n-2}$	(n-2)	
$(1+i)^{n-3}$	(n-3)	
.	.	
.	.	
.	.	
$(1+i)=^{1}a\,(1+i)$	1	
$(1+i)=^{0}$	0	

$$A= a\,(1+i)^{n-1}+a\,(1+i)^{n-2}+a\,(1+i)^{n-3}+\dots\dots+a\,(1+i)+a$$

$$A= a + a\,(1+i)+\dots\dots+a\,(1+i)^{n-3}+a\,(1+i)^{n-2}+a\,(1+i)^{n-1}$$

هذه الحدود تشكل متتالية هندسية أساسها $(1+i)$ وحدها الأول a:

$$S=a\,\frac{Q^{n}-1}{Q-1} \Longrightarrow A=a\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

القيمة $\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$ تعطى من خلال الجدول المالي رقم 03.

أ-2) حساب مختلف العناصر:

من العلاقة: $A=a\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$ يمكن ايجاد :

عدد الدفعات: $(1+i)^{n}=\frac{Ai+a}{a}$

معدل الفائدة المركبة: $\frac{(1+i)^{n}-1}{i}=\frac{A}{a}$

قيمة الدفعة: $=A\,\frac{i}{(1+i)^{n}-1}$

ملاحظة:

$$\frac{i}{(1+i)^{n}-1}=\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}-\mathrm{i}$$

ويمكن البرهان على ذلك كما يلي:

$$\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}-i=\frac{i-i(1-(1+i)^{-n})}{1-(1+i)^{-n}}=\frac{i[1-(1-(1+i)^{-n})]}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$=\frac{i[1-1-(1+i)^{-n})]}{1-(1+i)^{-n}}=\frac{i(1+i)^{-n})}{1-(1+i)^{-n}}=\frac{i(1+i)^{-n})}{1-(1+i)^{-n}}\times\frac{(1+i)^{n})}{(1+i)^{n})}=\frac{i}{(1+i)^{n}-1}$$

حيث نجد القيمة $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}-i$ في الجدول المالي رقم 05.

أ-3) تطبيقات

تطبيق رقم01:

ما هي القيمة المكتسبة لـ15دفعة ثابتة في نهاية المدة؟ قيمة الدفعة 000 71 دج ومعدل الفائدة المركبة 6,5% سنويا.

الحل:

$$A=\frac{(1+i)^{n}-1}{i}=71\,000\frac{(1,065)^{15}-1}{0,065}=71\,000\times 24,182169331$$
$$=1\,716\,934,02\ DA.$$

تطبيق رقم 02:

ما هي القيمة المكتسبة لـ12دفعة ثابتة في نهاية المدة ؟ قيمة الدفعة60000 دج، معدل الفائدة المركبة 3,10% سنويا.

الحل:

المعدل 3,10% لا نجده في الجدول المالي، إذن نقوم بالاستكمال الخطي:

$3\% \rightarrow 14,19202933$

$3,10\% \rightarrow ?$

$\underline{3,25\% \rightarrow 14,39528523}$

$0,25\% \rightarrow 0,2032559$

$\underline{0,1\% \rightarrow x}$

$$x=\frac{0,001\times0,2032559}{0,0025}=0,08130236$$
$$3,10\% \rightarrow 14,19202933+0,08130236=14,27333169$$
$$A=a\frac{(1+i)^{n}-1}{i}=60\,000\,\frac{(1,031)^{12}-1}{0,031}=60\,000\times14,27333169$$
$$=856\,399,90DA.$$

تطبيق رقم03:

نريد تشكيل رأسمال قدره 000 100 دج بواسطة 5 دفعات متساوية في نهاية المدة. إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة هو7%، ما هي قيمة هذه الدفعة؟

الحل:

$$a=A\frac{i}{(1+i)^{n}-1}=A\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}-i\right]=100\,000\times[0,24389068-0.07]$$
$$=100\,000\times0,17389068=17\,389,068\ DA.$$

تطبيق رقم04:

ما هو عدد الدفعات بقيمة 10.000دج الواجب دفعها في نهاية كل مدة ؟ من أجل تشكيل رأسمال قدره 284,738 110 دج. معدل الفائدة المركبة هو9%.

الحل:

$$(1+i)^{n}=\frac{Ai+a}{a}=\frac{110\,284,738\times0,09+10\,000}{10\,000}=1,99256264.$$

من الجدول المالي رقم 01 نجد n=8، أي عدد الدفعات الواجبة هو8. كما يمكن إيجاده باستعمال اللوغاريتم.

تطبيق رقم05:

رأسمال قدره 000 100 دج يجب تشكيله عن طريق دفعات متساوية بقيمة 500 12 دج للدفعة الواحدة في نهاية كل سنة. ما هو عدد هذه الدفعات، معدل الفائدة المركبة هو 4%؟

الحل:

$$(1+i)^{n}=\frac{Ai+a}{a}=\frac{100\,000\times0,04+12\,500}{12\,500}=1,32$$

من الجدول المالي رقم 01 نجدn محصورة بين 7 و8 سنوات. في هذه الحالة يكون لدينا حلين:

أ) دفع 7 دفعات على ان تكون قيمة الدفعات الستة الأولى هي 500 12دج وأما الدفعة السابعة فتحتوي إضافة إلى قيمتها الجزء المتبقي لاستكمال رأس المال المراد تشكيله.

$$A=\frac{(1+i)^{n}-1}{i}=12\,500\frac{(1,04)^{6}-1}{0,04}=12\,500\times6,632975462$$
$$A=82\,912,19\ DA.$$

إذن في الدفعة السابعة يدفع: $_7=(100\,000-82\,912,19)=17.087,81DA$

ب) دفع 7 أو8 دفعات لكن بتغيير في قيمة الدفعة

- 7 دفعات: $a = A\frac{i}{(1+i)^n - 1} = 100\,000\frac{0,04}{(1,04)^7 - 1} = 12\,660,96$ DA
- 8 دفعات: $a = A\frac{i}{(1+i)^n - 1} = 100\,000\frac{0,04}{(1,04)^8 - 1} = 10\,852,78$ DA

تطبيق رقم06:

بأي معدل فائدة مركبة يتم تشكيل رأسمال قدره 86 919,37422 دج بواسطة 10 دفعات ثابتة في نهاية المدة ؟ قيمة كل دفعة 6 000 دج؟

الحل:

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A}{a} = \frac{86\,919,37422}{6\,000} = 14,48656237$$

من الجدول المالي رقم 03 نجد i=8%

تطبيق رقم07:

رأسمال قيمته 1 500 000 دج مشكل بعد 9سنوات بدفعات قيمة كل منها 130 000 دج في نهاية كل سنة، ما هو معدل الفائدة المركبة؟

الحل:

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{A}{a} = \frac{1\,500\,000}{130\,000} = 11,53846153$$

من الجدول المالي رقم03، المعدل محصور بين 6% و 6,25%

6% → 11,49131583
X% → 11,53846153
6.25% → 11,61088112
0,25% → 0,11956529
(6,25 -X)% → 0,07241959

$$(6,25 - X)\% = \frac{0,07241959 \times 0,25\%}{0,11956529} = 0,00151422 \Rightarrow x = 6,098\%.$$

ب) القيمة الحالية لدفعات ثابتة في نهاية المدة:

القيمة الحالية لدفعات ثابتة في نهاية المدة هي مجموع القيم الحالية لهذه الدفعات عند تاريخ إمضاء العقد أي في الزمن0، أي فترة قبل الدفعة الأولى.

ب-1) حساب القيمة الحالية لدفعات ثابتة في نهاية المدة:

القيمة الحالية لمجموعة دفعات تساوي إلى مجموع القيم الحالية لمختلف هذه الدفعات.

القيمة الحالية	الفترة	الدفعة
$(1+i)^{-1}$	1	
$(1+i)^{-2}$	2	
$(1+i)^{-3}$	3	
.	.	
.	.	
$(1+i)^{-(n-1)}$	n-1	
$(1+i)^{-n}$	0	

$$V_0 = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-3} + \ldots + a(1+i)^{-(n-1)} + a(1+i)^{-n}$$

هذه الحدود تشكل متتالية هندسية أساسها $(1+i)^{-1}$و حدها الأول $(1+i)^{-1}$

$$S = \frac{Q^n - 1}{Q - 1} \Rightarrow V_0 = a(1+i)^{-1}\frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1}$$

$$V_0 = a(1+i)^{-1}\frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1} \times \frac{-(1+i)}{-(1+i)} \Rightarrow V_0 = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

القيمة $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ تعطى من خلال الجدول المالي رقم 04.

ب-2) حساب مختلف العناصر الخاصة بالقيمة الحالية لدفعات ثابتة في نهاية المدة

من العلاقة: $V_0 = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ يمكن إيجاد :

عدد الدفعات: $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{V0}{a}$

معدل الفائدة المركبة: $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{V0}{a}$

قيمة الدفعة: $a = V_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$

ب-3) تطبيقات

تطبيق رقم01:

ما هي القيمة الحالية لـ 6 دفعات ثابتة في نهاية المدة؟ قيمة كل منها180 000 دج ومعدل الفائدة المركبة هو7% سنويا.

الحل:

$$V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 180\,000\frac{1-(1,07)^{-6}}{0,07}$$

$$V_0 = 180\,000 \times 4,76653965 = 857\,977,14 \text{ DA.}$$

تطبيق رقم02:

ماهي القيمة الحالية لـ 12 دفعة ثابتة في نهاية المدة؟ قيمة كل منها 50 000 دج ومعدل الفائدة المركبة هو 5,10% سنويا.

الحل:

المعدل 5,10% لا يوجد في الجدول المالي رقم 04، إذن نقوم بالاستكمال الخطي:

$5\% \rightarrow 8,86325160$

$5,10\% \rightarrow x$

$\underline{5,25\% \rightarrow 8,73959466}$

$0,25\% \rightarrow 0,12365694$

$\underline{0,15\% \rightarrow x - 8,73959466}$

$$x - 8,73959466 = \frac{0,15\% \times 0,12365694}{0,25\%} = 0,074194164$$

$$\Rightarrow x = 8,73959466 + 0,074194164 = 8,81378824$$

$$V_0 = 50\,000 \times 8,81378824 = 440\,689,44 \text{ DA.}$$

تطبيق رقم03:

القيمة الحالية لـ11 دفعة ثابتة في نهاية المدة هي: 4 012 607,80 دج، معدل الفائدة المركبة هو 2 % سنويا. أوجد قيمة الدفعة؟

الحل:

$$a = V_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = V_0 \frac{0,02\%}{1-(1,02)^{-11}} = 4\,012\,607,80 \times 0,10217794$$

$$a = 410\,000 \text{DA.}$$

تطبيق رقم04:

القيمة الحالية لمجموعة دفعات ثابتة في نهاية المدة هي:3 118 594,5 دج، قيمة كل دفعة 900 000 دج، معدل الفائدة المركبة هو 6 % سنويا. ماهو عدد الدفعات؟

الحل:

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{V0}{a} \Rightarrow \frac{1-(1,06)^{-n}}{0,06} = \frac{3\,118\,594,5}{900\,000} = 3,465105$$

من الجدول المالي رقم 04 نجد n=4، أي 4 دفعات.

تطبيق رقم05:

القيمة الحالية لـ5 دفعات ثابتة تدفع في نهاية المدة هي:1 740 288,7854 دج، قيمة كل دفعة 380 000دج، ما هو معدل الفائدة المركبة ؟

الحل:

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{V0}{a} \Rightarrow \frac{1-(1+i)^{-5}}{i} = \frac{1\,740\,288,7854}{380\,000} = 4,57970733$$

من الجدول المالي رقم 04 نجد i=3% .

ملاحظة:

في حالة عدم وجود المعدل أو المدة في الجدول المالي نقوم بالاستكمال الخطي.

3. دفعات ثابتة في بداية المدة

هي دفعات دورية تدفع عادة بهدف تكوين رأسمال بعد فترة معينة، المبالغ المدفوعة تكون متساوية وتكون في بداية كل فترة، فتكون الدفعة الأولى في بداية الفترة الأولى. تسمى كذلك بدفعات غير عادية أو فورية.

أ) القيمة المكتسبة لدفعات ثابتة في بداية المدة

أ-1) حساب القيمة المكتسبة لمجموعة دفعات ثابتة في بداية المدة:

القيمة المكتسبة لمجموعة دفعات ثابتة في بداية المدة هي مجموع القيم المكتسبة لهذه الدفعات، يتم حسابها كما يلي:

الدفعة	الفترة	القيمة المكتسبة
الأولى	n	$(1+i)^{n}$
الثانية	(n-1)	$(1+i)^{n-1}$
الثالثة	(n-2)	$(1+i)^{n-2}$
.	.	.
.	.	.
	.	.
الأخيرة(n-1)	1	$(1+i)^{1}a\,(1+i)$

$$A = a\,(1+i)^{n} + a\,(1+i)^{n-1} + a\,(1+i)^{n-2} + a\,(1+i)^{n-3} + \ldots + a\,(1+i)$$
$$A = a\,(1+i) + \ldots + a\,(1+i)^{n-3} + a\,(1+i)^{n-2} + a\,(1+i)^{n-1} + a\,(1+i)^{n}$$

هذه الحدود تشكل متتالية هندسية أساسها (1+i) وحدها الأول $a\,(1+i)$.

$$S = \frac{Q^{n}-1}{Q-1} \Rightarrow A = a\,(1+i)\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

القيمة $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ تعطى من خلال الجدول المالي رقم 03.

أ-2) حساب مختلف العناصر الخاصة بالقيمة المكتسبة لدفعات ثابتة في بداية المدة:

من العلاقة: $A = a\,(1+i)\,\frac{(1+i)^n-1}{i}$ يمكن ايجاد:

عدد الدفعات: $(1+i)^n = \frac{(A+a)i+a}{ai+a}$

قيمة الدفعة: $a = A\frac{i}{(1+i)^{n+1}-i-1}$

أ-3) تطبيقات:

تطبيق رقم01:

ماهي القيمة المكتسبة لـ15دفعة ثابتة في بداية المدة؟ قيمة الدفعة71 000دج، معدل الفائدة المركبة 6,5% سنوياً.

الحل:

$$A = a\,(1+i)\,\frac{(1+i)^n-1}{i} = 71\,000(1,065)\,\frac{(1,065)^{15}-1}{0,065}$$

$$A = 71\,000 \times 25,754010338 = 1\,828\,534,73DA.$$

تطبيق رقم02:

ماهي القيمة المكتسبة لـ12دفعة ثابتة في بداية المدة؟ قيمة الدفعة60 000دج، معدل الفائدة المركبة 3,10% سنويا.

الحل:

المعدل 3,10% لا نجده في الجدول المالي، إذن نقوم بالاستكمال الخطي:

$3\% \rightarrow 14,19202933$

$3,10\% \rightarrow x$

$\underline{3,25\% \rightarrow 14,39528523}$

$0,25\% \rightarrow 0,2032559$

$\underline{0,1\% \rightarrow x-14,1920933}$

$$x-14,1920933=\frac{0,001\times0,2032559}{0,0025}=0,08130236 \Rightarrow x = 14,27292514$$

$$A = a\,(1+i)\,\frac{(1+i)^n-1}{i} = 60\,000(1,031)\,\frac{(1,031)^{12}-1}{0,031}$$

$$A = 60.000\times14,27292514(1,031)=60\,000\times14,715385823$$

$$= 882\,923,15\ DA$$

تطبيق رقم03:

نريد تشكيل رأسمال قدره 100 000دج بواسطة 5 دفعات متساوية في بداية المدة. إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة هو7%، ما هي قيمة هذه الدفعة؟

الحل:

$$=A\,\frac{i}{(1+i)^{n+1}-i-1} = 100\,000 \times \frac{0,07}{(1,07)^{5+1}-0,07-1}$$

$$= 100\,000 \times 0,162514667 = 16\,251,47DA.$$

تطبيق رقم04:

ما هو عدد الدفعات بقيمة 10 000دج الواجب دفعها في بداية المدة ؟ من أجل تشكيل رأسمال قدره 120 210,364دج. معدل الفائدة المركبة هو9%.

الحل:

$$(1+i)^n=\frac{(A+a)i+a}{ai+a} = \frac{(120\,210.364+10\,000)\times0,09+10\,000}{10\,000x0,09+10\,000}$$

$$= 1,992562641.$$

من الجدول المالي رقم 01 نجد n= 8، أي عدد الدفعات الواجبة هو8.

ب) القيمة الحالية لدفعات ثابتة في بداية المدة:

القيمة الحالية لدفعات ثابتة في بداية المدة هي القيمة التي تأخذها هذه الدفعات عند تاريخ إمضاء العقد أي في الزمن0، أي عند دفع الدفعة الأولى.

ب-1) حساب القيمة الحالية لمجموعة دفعات ثابتة في بداية المدة:

القيمة الحالية لمجموعة دفعات ثابتة تساوي إلى مجموع القيم الحالية لهذه الدفعات. ويتم حسابها كما يلي:

الدفعة	الفترة	القيمة الحالية
الأولى	0	
الثانية	1	$(1+i)^{-1}$
الثالثة	2	$(1+i)^{-2}$
.	.	.
	.	.
الأخيرة(n-1)	n-1	$(1+i)^{-(n-1)}$

$V_0= a + a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-3} + ... + a(1+i)^{-(n-1)}$

هذه الحدود تشكل متتالية هندسية أساسها $(1+i)^{-1}$ وحدها الأول a

$$S = \frac{Q^n-1}{Q-1} \Rightarrow V_0=a\frac{(1+i)^{-n}-1}{(1+i)^{-1}-1} = a\frac{(1+i)^{-n}-1}{(1+i)^{-1}-1} \times \frac{(1+i)}{(1+i)}$$

$$\Rightarrow V_0= a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

القيمة $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ تعطى من خلال الجدول المالي رقم 04.

ب-2) حساب مختلف العناصر الخاصة بالقيمة الحالية لدفعات ثابتة في بداية المدة :

من العلاقة: $V_0 = a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ يمكن إيجاد :

قيمة الدفعة: $a=V_0\frac{i}{(1+i)-(1+i)^{-n+1}}$

عدد الدفعات: $\frac{V0}{a(1+i)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

ب-3) تطبيقات

تطبيق رقم01:

ما هي القيمة الحالية لـ6 دفعات ثابتة في بداية المدة؟ قيمة كل منها180 000دج ومعدل الفائدة المركبة هو7%.

الحل:

$V_0=a(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}= 180\,000(1{,}07)\frac{1-(1{,}07)^{-6}}{0{,}07}$

$V_0= 180\,000 \times 5{,}100197435 = 918\,035{,}54$ DA.

تطبيق رقم02:

ما هي القيمة الحالية لـ12 دفعة بداية المدة؟ قيمة كل منها 50000 دج ومعدل الفائدة المركبة هو 5,10%

الحل:

المعدل 5,10% لا يوجد في الجدول المالي رقم 04، إذن نقوم بالاستكمال الخطي:

$5\% \rightarrow 8{,}863251636$

$5{,}10\% \rightarrow x$

$\underline{5{,}25\% \rightarrow 8{,}739594538}$

$0{,}25\% \rightarrow 0{,}123657097$

$\underline{0{,}15\% \rightarrow x- 8{,}739594538}$

$x- 8{,}739594538 = \frac{0{,}15\% \times 0{,}123657097}{0{,}25\%} = 0{,}0741942582$

$\Rightarrow x = 8{,}739594538 + 0{,}0741942582 = 8{,}8137887962$

$\Rightarrow V_0 = 50\,000 \times (1{,}051) \times 8{,}8137887962 = 463\,164{,}60$ DA.

تطبيق رقم03:

القيمة الحالية لـ11 دفعة ثابتة في بداية المدة هي: 034 993 3دج، معدل الفائدة المركبة هو 2 %. أوجد قيمة الدفعة؟

الحل:

$$=V_0\frac{i}{(1+i)-(1+i)^{-n+1}} = 3\,993\,034\frac{0{,}02}{(1{,}02)-(1{,}02)^{-10}}$$

$$= 3\,993\,034 \times 0{,}100174453 = 400\,000 \text{ DA.}$$

1. دفعات تشكل متتالية هندسية

في حالة ما إذا كانت للشخص إمكانيات الدفع متزايدة من سنة لأخرى، فيمكن أن نستعمل هذا النوع من الحساب، أي الدفع بأقساط تشكل متتالية هندسية.

لدينا:

a_1: قيمة الدفعة الأولى

q: أساس المتتالية الهندسية

n: عدد الدفعات

i: معدل الفائدة المركبة

نبحث عن القيمة الحالية V_0 والقيمة المكتسبة A في تاريخ لمجموع الدفعات، علما انه دائما تكون:

$$A = V_0(1+i)^n$$

أ) دفعات نهاية المدة

إذا كان $q \neq (1+i)$، فتكون لدينا :

$$A = a_1(1+i)^{n-1} + a_1q(1+i)^{n-2} + a_1q^2(1+i)^{n-3} \ldots\ldots + a_1q^{n-2}(1+i) + a_1q^{n-1}$$

$$A = a_1q^{n-1} + a_1q^{n-2}(1+i) + a_1q^{n-3}(1+i)^2 \ldots\ldots\ldots + a_1q(1+i)^{n-2} + a_1(1+i)^{n-1}$$

تشكل متتالية هندسية حدها الأول a_1q^{n-1} و أساسها $q^{-1}(1+i)$

$$A = a_1q^{n-1}\frac{(q^{-1}(1+i))^n - 1}{q^{-1}(1+1) - 1} = a_1q^n\frac{(q^{-n}(1+i)^n - 1}{(1+1) - q} = a_1\frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i) - q}$$

ومنه، القيمة المكتسبة لمجموعة دفعات تتبع متتالية هندسية: $A = a_1\frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i) - q}$

القيمة الحالية لمجموعة دفعات تتبع متتالية هندسية:

$$V_0 = A(1+i)^{-n} = \frac{a1}{(1+i)^n}\frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i) - q}$$

وإذا كان $q = (1+i)$، فتكون لدينا :

القيمة المكتسبة لمجموعة دفعات تتبع متتالية هندسية :

$$A = a_1(1+i)^{n-1} + a_1(1+i)(1+i)^{n-2} + a_1(1+i)^2(1+i)^{n-3} + a_1(1+i)^3(1+i)^{n-4}\ldots$$

$$+ a_1(1+i)^{n-1}$$

$$A = a_1(1+i)^{n-1} + a_1(1+i)^{n-1} + a_1(1+i)^{n-1} + a_1(1+i)^{n-1} \ldots + a_1(1+i)^{n-1}$$

$$A = na_1(1+i)^{n-1}$$

القيمة الحالية لمجموعة دفعات تتبع متتالية هندسية :

$$V_0 = A(1+i)^{-n} = na_1(1+i)^{n-1}(1+i)^{-n} = na_1(1+i)^{-1}$$

$$V_0 = na_1(1+i)^{-1} = \frac{a1}{(1+i)}$$

ب) دفعات بداية المدة

إذا كان $q \neq (1+i)$، فتكون لدينا :

القيمة المكتسبة لمجموعة دفعات تتبع متتالية هندسية: $A = a_1(1+i)\frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i) - q}$

القيمة الحالية لمجموعة دفعات تتبع متتالية هندسية: $V_0 = \frac{a1}{(1+i)^{n-1}}\frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i) - q}$

وإذا كان $q = (1+i)$، فتكون لدينا:

القيمة المكتسبة لمجموعة دفعات تتبع متتالية هندسية: $A = na_1(1+i)^n$

القيمة الحالية لمجموعة دفعات تتبع متتالية هندسية: $V_0 = na_1$

تطبيق:

أوجد قيمة الدفعة الأولى لـ8 دفعات تسدد في نهاية المدة؟ تشكل فيما بينها متتالية هندسة أساسها 1,03، علما أن معدل استحداث 5,4%، قيمتها الحالية بلغت 1 200 000 دج.

الحل:

$$V_0 = a1\ \frac{a1}{(1+i)^n}\frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i) - q}$$

$$\Leftrightarrow 1\,200\,000 = \frac{a1}{(1{,}054)^8}\frac{(1{,}054)^8 - (1{,}03)^8}{(1{,}054) - (1{,}03)} \Rightarrow a_1 = 171\,135{,}09\text{DA}.$$

2. دفعات تشكل متتالية حسابية

لدينا:

a_1: قيمة الدفعة الأولى

r: أساس المتتالية الحسابية

n: عدد الدفعات

i: معدل الفائدة المركبة

نبحث عن القيمة الحالية V_0 والقيمة المكتسبة A في تاريخ n لمجموع الدفعات، علما انه دائما تكون: $A = V_0(1+i)^n$

أ) دفعات نهاية المدة

القيمة المكتسبة لمجموعة دفعات تتبع متتالية حسابية:

$$A = (a_1 + \frac{r}{i})\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{n}{i}$$

القيمة الحالية لمجموعة دفعات تتبع متتالية حسابية:

$$V_0 = (a_1 + \frac{r}{i} + nr)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{nr}{i}$$

ب) دفعات بداية المدة

القيمة المكتسبة لمجموعة دفعات تتبع متتالية حسابية :

$$A = (1+i)[(a_1 + \frac{r}{i})\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nr}{i}]$$

القيمة الحالية لمجموعة دفعات تتبع متتالية حسابية:

$$V_0 = (1+i)[(a_1 + \frac{r}{i} + nr)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{nr}{i}]$$

تطبيق:

أوجد قيمة الدفعة الأولى لـ15 دفعة، تسدد في نهاية المدة؟، حيث تشكل فيما بينها متتالية حسابية أساسها 50 000 دج، علما أن معدل استحداث هو8,9%، قيمتها الحالية بلغت 15000000 دج.

الحل:

$$V_0 = (a1 + \frac{r}{i} + nr)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{nr}{i}$$

$$\Leftrightarrow 15\,000\,000 = (a_1 + \frac{50.000}{0{,}089} + 15 \times 50.000)\,\frac{1-(1{,}089)^{-15}}{0{,}089} - \frac{15 \times 50.000}{0{,}089}$$

$$\Rightarrow a_1 = 1\,577\,390{,}29DA.$$