التكافؤ بفوائد مركبة يطبق على العمليات المالية المتوسطة والطويلة الأجل، تجد هنا نفس المبدأ المطبق في التكافؤ بفوائد بسيطة.

1. تعريف التكافؤ بفوائد مركبة

نقول عن رأسمالين a_1 وa_2 يستحقان الدفع بالترتيب في n_1 وn_2 متكافئان في تاريخ معين، عندما تكون لهما في هذا التاريخ نفس القيمة الحالية.

2. تكافؤ رأسمالين

إذا كان المبلغين a_1 وa_2 مستحقان الدفع عند n_1 وn_2 على الترتيب متكافئان بفوائد مركبة في تاريخ ما، فهذا التكافؤ يبقى صحيحا في أي تاريخ آخر n .

$a_1(1+i)^{-n_1}=a_2(1+i)^{-n_2}$، نضرب طرفي المعادلة في $(1+i)^{n}$، نتحصل على:

$a_1(1+i)^{-(n_1-n)}=a_2(1+i)^{-(n_2-n)}$، هذه العلاقة تبين لنا تساوي القيمتين الحاليتين للمبلغين في التاريخ n، وهكذا، إذا حصل التكافؤ في يوم ما، فيبقى صحيح في أي تاريخ آخر .

تطبيق:

دين قدره 100 000 دج، يستحق السداد بعد 4 سنوات، معدل الفائدة المركبة 8%سنويا.

ما هي قيمة الدين إذا تم الدفع 3 سنوات بعد تاريخ الاستحقاق؟

الحل:

$$a_1(1+i)^{-n_1}=a_2(1+i)^{-n_2}$$

$$100\,000\,(1{,}08)^{-4}=a_2(1{,}08)^{-7}$$

$$\Rightarrow a_2=\frac{100\,000\,(1{,}08)-4}{(1{,}08)-7}=125\,971{,}2\ \text{DA}.$$

3. تكافؤ رأسمال مع عدة رؤوس أموال

إذا تكافأ رأسمال a في تاريخ ما بفوائد مركبة، مع مجموعة من رؤوس الأموال، فالتكافؤ يكون صحيح في أي تاريخ آخر .

$$a_1(1+i)^{-(n_1-n)}=a_2(1+i)^{-(n_2-n)}=a_3(1+i)^{-(n_3-n)}\ldots$$

تطبيق:

شخص مدين بالمبالغ التالية:

- 100 000 دج مستحقة بعد 4 سنوات
- 200 000 دج مستحقة بعد سنتين

اتفق مع الدائن على التخلص من دينه بعد 3 سنوات.

أحسب مبلغ هذا الدين الجديد علما أن معدل الفائدة المركبة 6% سنويا ؟

الحل:

$$a(1+i)^{-n}=a_1(1+i)^{-n_1}+a_2(1+i)^{-n_2}$$

$$a(1{,}06)^{-3}=100\,000(1{,}06)^{-4}+200\,000(1{,}06)^{-2}$$

$$\Rightarrow a=\frac{100\,000\,(1{,}06)-4+200\,000\,(1{,}06)-2}{(1{,}06)-3}=306\,339{,}62\ \text{DA}.$$

4. تاريخ الاستحقاق المشترك

هناك مسألتين فيما يخص تاريخ الاستحقاق المشترك:

- تاريخ الاستحقاق لرأس المال الوحيد الذي يعوض عدة رؤوس الأموال معروف، ما هي القيمة الاسمية للرأس المال هذا؟
- القيمة الاسمية للرأس المال معروفة، ما هو تاريخ الاستحقاق لرأس المال هذا؟

تطبيق رقم 01:

نريد تسديد مرة واحدة بعد 3سنوات الديون التالية:

- 50 000 دج مستحقة بعد 26 شهر
- 20 000 دج مستحقة بعد 32 شهر
- 30 000 دج مستحقة بعد 20 شهر.

إذا كان معدل الفائدة المركبة 4% سنويا، ماهو مبلغ التسديد الوحيد؟

الحل:

$$X(1+i)^{-(n_x-n)}=a_1(1+i)^{-(n_1-n)}+a_2(1+i)^{-(n_2-n)}+a_3(1+i)^{-(n_3-n)}$$

$$X(1{,}04)^{-(\frac{36}{12}-\frac{36}{12})}=50000(1{,}04)^{-(\frac{26}{12}-\frac{36}{12})}+20\,000(1{,}04)^{-(\frac{32}{12}-\frac{36}{12})}$$

$$+30\,000\,(1{,}04)^{-(\frac{20}{12}-\frac{36}{12})}$$

$$X= 50\,000\,(1{,}04)^{-(-\frac{10}{12})}+20\,000(1{,}04)^{-(-\frac{4}{12})}+30\,000(1{,}04)^{-(-\frac{16}{12})}$$

$$X= 50\,000(1{,}04)^{\frac{10}{12}}+20\,000(1{,}04)^{\frac{4}{12}}+30\,000\,(1{,}04)^{\frac{16}{12}}$$

$$X= 51\,661{,}20+ 20\,263{,}19+ 31\,610{,}57 = 103\,534{,}96 \text{ DA.}$$

تطبيق رقم 02:

نريد تسديد مرة واحدة مبلغ 89 717,76 دج يسمح لنا بتعويض الديون التالية:

- 10 000 دج مستحقة بعد 07 أشهر
- 70 000 دج مستحقة بعد 06 أشهر

إذا كان معدل الفائدة المركبة 8% سنويا، ماهو تاريخ الإستحقاق للتسديد الوحيد؟

الحل:

$$X(1+i)^{-(n_x-n)} = A_1\,(1+i)^{-(n_1-n)}+A_2\,(1+i)^{-(n_2-n)}+A_3\,(1+i)^{-(n_3-n)}$$

$$X(1{,}08)^{-n} = A_1\,(1{,}08)^{-n_1}+A_2\,(1{,}08)^{-n_2}$$

$$89\,717{,}76(1{,}08)^{-n} = 10\,000\,(1{,}08)^{-\frac{7}{12}}+70\,000\,(1{,}08)^{-\frac{6}{12}}$$

$$(1{,}08)^{-n} = \frac{10\,000(1{,}08)^{-\frac{7}{12}}+70\,000\,(1{,}08)^{-\frac{6}{12}}}{89\,717{,}76} = \frac{9\,560{,}99+ 67\,357{,}53}{89\,717{,}76}$$

$$= \frac{76\,918{,}52}{89\,717{,}76} = 0{,}85733882$$

من الجدول المالي رقم 02 نجد$n=2$ أي تاريخ استحقاق التسديد الوحيد هو سنتين.

5. تاريخ الاستحقاق المتوسط

في حالة خاصة، القيمة الاسمية لرأسمال الوحيد تكون مساوية لمجموع القيم الاسمية لرؤوس الأموال المختلفة التي يعوضها. في هذه الحالة، يسمى تاريخ الاستحقاق المشترك بتاريخ الاستحقاق المتوسط.

تطبيق:

لدينا الديون الثلاث التالية:

- 25 000 دج مستحقة بعد 3سنوات
- 68 000 دج مستحقة بعد 4سنوات

- 72 000 دج مستحقة بعد 5 سنوات.

إذا كان معدل الفائدة المركبة 5% سنويا، ماهو تاريخ الاستحقاق المتوسط؟

الحل:

$$X = 25\,000 + 68\,000 + 72\,000 = 165\,000 \text{ DA}$$

$$X(1+i)^{-(n_x-n)} = A_1\,(1+i)^{-(n_1-n)}+A_2\,(1+i)^{-(n_2-n)}+A_3\,(1+i)^{-(n_3-n)}$$

$$165\,000\,(1{,}05)^{-nx} = 25\,000\,(1{,}05)^{-3}+68\,000(1{,}05)^{-4}+72\,000(1{,}05)^{-5}$$

$$(1{,}05)^{-n_x} = \frac{21\,595{,}94+ 55\,943{,}77 +56\,413{,}88}{165\,000} = 0{,}81183996$$

$$(1{,}05)^{-n_x} = 0{,}81183996$$

لا توجد هذه القيمة في الجدول المالي رقم02، اذن نقوم باستعمال طريقة الإستكمال الخطي.

من الجدول المالي رقم02 نجد التاريخ nx محصور بين 4 و 5 سنوات.

$$(1{,}05)^{-5} = 0{,}78352616$$

$$(1{,}05)^{-n_x} = 0{,}81183996$$

$$(1{,}05)^{-4} = 0{,}82270247$$

$$12 \text{ mois} \rightarrow 0{,}03917631$$

$$(n_x-48) \rightarrow 0{,}01086251$$

$$(n_x-48) = \frac{0{,}01086251 \times 12}{0{,}03917631} = 3{,}32726895$$

$$\Rightarrow n_x = 51{,}32726895 \text{ mois} = 4{,}27727 \text{ ans} = 4 \text{ ans} + 3 \text{ mois} + 9 \text{ jours}$$

إذن تاريخ الاستحقاق المتوسط هو 4 سنوات و3 أشهر و 9أيام.