حل السلسلة رقم 02 :

التمرين الأول :

لدينا 15 مصباح كهربائي ← 10 مصابيح سليمة.
                        ← 05 مصابيح فاسدة

نختار 3 مصابيح من بين 15 مصباح بطريقة عشوائية.

- إيجاد الاحتمالات التالية :

1- أن تكون جميعها سليمة :

نعرف الحادثة A : المصابيح المختارة كلها سليمة.

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{C_{10}^{3}}{C_{15}^{3}}$$

$$= \frac{\frac{10!}{(10-3)!\,3!}}{\frac{15!}{(15-3)!\,3!}} = \frac{120}{455} = \{0,26\}$$

إحتمال أن تكون جميع المصابيح المختارة سليمة هو 26 %

2- أن يكون مصباح واحد فقط فاسد :

نعرف الحادثة B : الحصول على مصباح واحد فقط فاسد من بين المصابيح المختارة.

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{5 \times \frac{10!}{(10-2)!\,2!}}{455} = \frac{225}{455}$$

$$= 0,49$$

احتمال الحصول على مصباح واحد فقط فاسد من بين المصابيح المختارة هو 0,49

3 - احتمال أن يكون مصباح واحد على الأقل فاسد :

نعرف الحادثة C : الحصول على مصباح واحد على الأقل فاسد من بين المصابيح الثلاثة المسحوبة.

$$P(C) = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2 + C_5^2 \cdot C_{10}^1 + C_5^3 \cdot C_{10}^0}{C_{15}^3}$$

$$= \frac{225 + 100 + 10}{455} = \frac{335}{455}$$

$$= 0,74$$

احتمال الحصول على مصباح واحد **على الأقل** فاسد من بين المصابيح الثلاثة هو 74٪

التمرين الثاني :

القيت ثلاث قطع نقود معا : إيجاد مايلي :

1 - المجموعة الأساسية : (S أو Ω).

تذكير : تتميز قطعة النقد بوجهين :

- وجه (صورة) Face
- ظهر (كتابة) Pile

عدد عناصر المجموعة الأساسية هو $n = 2^3 = 8$ ← عدد الوجوه ، k ← عدد القطع

$$\Omega = \{(P,P,P), (P,P,F), (P,F,P), (P,F,F), (F,P,P), (F,F,P), (F,P,F), (F,F,F)\}$$

٢- القطعة الأولى صورة (F) :

$$A = \{(F,P,P) ; (F,F,P) ; (F,P,F), (F,F,F)\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ب- إحدى القطع الثلاثة صورة :

$$B = \{(P,P,F) ; (P,F,P) ; (F,P,P)\}$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$$

التمرين الثالث :

مزهرين حجري نرد ، المطلوب : إيجاد إحتمالات الحوادث التالية :

* لحساب أي إحتمال يجب إيجاد مجموعة الحالات الممكنة (المجموعة الأساسية)

$$card(\Omega) = \underbrace{6}_{\text{عدد الوجوه}}^{\overset{\text{عدد القطع}}{\longrightarrow} 2} = 6^2 = 36$$

عناصر المجموعة الأساسية هي :

الزهرة 2 \ الزهرة 1	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	2,5	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

٨- الحصول على النتيجة 2 في الحجر الأول :

$$A = \{(2,1) ; (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\}$$

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

2- الحصول على مجموع النتيجتين 8:

$B = \{(5,6) ; (6,5)\}$

$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

3- الحصول على نتيجتين فرقهما 6 :

$C = \emptyset$

$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{0}{36} = 0$

تسمى الحادثة C : "حادثة مستحيلة"

4- الحصول على نتيجتين متساويتين :

$D = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

$P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

5- الحصول على نتيجتين مجموعهما أقل من 6 :

$E = \{(1,1); (1,2), (1,3), (1,4); (2,1), (2,2); (2,3); (3,1); (3,2); (4,1)\}$

$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

التمرين الرابع :

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

1- باعتبار أن حوادث هذه التجربة لها نفس إمكانية وفرصة الظهور

2- باعتبار أن حوادث هذه التجربة ليس لها نفس إمكانية وفرصة الظهور وعليه إحتمالات هذه الحوادث نلخصها في الجدول التالي :

العادات الأولية	1	2	3	4	5	6
الاحتمال	0,1	0,3	0,05	0,15	0,25	0,15

المطلوب: حساب احتمالات الحوادث التالية في كلتا الاحتمالين:

1- الحادث A: نتيجة التجربة عدد زوجي:

$A = \{2, 4, 6\}$

$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ الاحتمال الأول:

الاحتمال الثاني: $P(A) = P(2) + P(4) + P(6)$

$= 0,3 + 0,15 + 0,15$

$= 0,6$

2- الحادث B: نتيجة التجربة عدد أقل من 3:

$B = \{1, 2\}$

الاحتمال الأول: $P(B) = \frac{|B|}{|S|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

الاحتمال الثاني: $P(B) = P(1) + P(2)$

$= 0,1 + 0,3$

$= 0,4$

3- الحادث C: نتيجة التجربة عدد مربع:

$C = \{1, 4\}$

الاحتمال الأول: $P(C) = \frac{|C|}{|S|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

الاحتمال الثاني: $P(C) = P(1) + P(4)$

$= 0,1 + 0,15$

$= 0,25$

4- الحادث D: نتيجة التجربة عدد أكبر من 6

$D = \emptyset$

الاحتمال الأول والثاني: $P(D) = 0$ (D حادث مستحيل)

5- الحادث E: نتيجة التجربة عدد أقل من 7.

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

الاقتراح الأول: $P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{6}{6} = 1$

الاقتراح الثاني: $P(E) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$

$= 0,1 + 0,3 + 0,05 + 0,15 + 0,25 + 0,15$

$= 1$

E حادث أكيد

التمرين الخامس:

$P(\bar{A}) = \frac{5}{8}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$P(A \cup B) = \frac{7}{8}$

المطلوب: إيجاد الحوادث التالية:

$P(A)$ ؟

لدينا:

$P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A})$

$= 1 - \frac{5}{8}$

$\boxed{P(A) = \frac{3}{8}}$

$P(B)$ ؟

لدينا: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B)$

$= \frac{7}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4}$

$\boxed{P(B) = \frac{6}{8}}$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{4}$$
$$\boxed{P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{8}}$$

التمرين السادس:

$P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,6$; $P(A \cap B) = 0,5$

1- حساب إحتمال أن الصياد A فقط يصيب الهدف:

$$P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$= 0,7 - 0,5$$
$$= 0,2$$

ومنه إحتمال أن الصياد A فقط يصيب الهدف هو 20%

2- حساب إحتمال أن الصياد A أو B يصيبان الهدف:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0,7 + 0,6 - 0,5$$
$$= 0,8$$

ومنه إحتمال أن الصياد A أو B يصيبان الهدف هو 80%

التمرين السابع:

	الفوج الأول	الفوج الثاني	المجموع
ناجح	25	21	41
راسب	05	09	14
المجموع	25	30	55

المطلوب: حساب إحتمالات الحوادث التالية:

1- الطالب المختار ينتمي إلى الفوج الأول:

$$P(A) = \frac{\text{عدد طلبة الفوج الأول}}{\text{المجموع الكلي للطلبة}} = \frac{25}{55} = \frac{5}{11}$$

2- الطالب المختار ناجح:

$P(B) = \frac{\text{عدد الطلبة الناجحين}}{\text{المجموع الكلي للطلبة}} = \frac{41}{55}$

3- الطالب المختار راسب:

أ) $P(C) = \frac{\text{عدد الطلبة الراسبين}}{\text{المجموع الكلي للطلبة}} = \frac{14}{55}$

ب) $P(C) = 1 - P(B)$

$= 1 - \frac{41}{55}$

$= \frac{14}{55}$

4- الطالب المختار ينتمي إلى الفوج الثاني:

$P(D) = \frac{\text{عدد طلبة الفوج الثاني}}{\text{المجموع الكلي للطلبة}} = \frac{30}{55} = \frac{6}{11}$

5- الطالب المختار ينتمي إلى الفوج الأول وراسب:

$P(A \cap C) = \frac{5}{55} = \frac{1}{11}$

6- الطالب المختار راسب علما أنه ينتمي إلى الفوج الأول:

$P(C/A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{1/11}{5/11} = \frac{1}{5}$

التمرين الثامن:

- إحتمال أن الأسرة تملك مسكن: $P(L) = 0,5$

- إحتمال أن الأسرة لا تملك مسكن هو: $P(\overline{L}) = 1 - P(L) = 0,5$

- إحتمال أن الأسرة تملك سيارة هو: $P(V) = 0,75$

إحتمال أن الأسرة لا تملك سيارة: $P(\overline{V}) = 1 - P(V) = 0,25$

- احتمال أن الأسرة تملك مسكن وسيارة : $P(L \cap V) = 0,3$

المطلوب: إيجاد الاحتمالات التالية:

1- الأسرة تملك سيارة علما أنها المسكن الذي تسكن فيه:

$$P(V/L) = \frac{P(V \cap L)}{P(L)} = \frac{0,5}{0,3} = 0,6$$

2- الأسرة لا تملك مسكن علما أنها تملك سيارة:

$$P(\bar{L}/V) = \frac{P(V \cap \bar{L})}{P(V)} = \frac{P(V-L)}{P(V)} = \frac{P(V) - P(V \cap L)}{P(V)}$$

$$= \frac{0,75 - 0,3}{0,75}$$

$$= 0,6$$

3- الأسرة لا تملك سيارة علما أنها لا تملك سكن:

$$P(\bar{V}/\bar{L}) = \frac{P(\bar{V} \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{1 - P(\bar{V} \cap \bar{L})}{P(\bar{L})}$$

$$= \frac{1 - P(V \cup L)}{P(\bar{L})} = \frac{1 - [P(V) + P(L) - P(V \cap L)]}{P(\bar{L})}$$

$$= \frac{1 - (0,75 + 0,5 - 0,3)}{0,5}$$

$$= 0,1$$

التمرين التاسع:

$$P(A) = 1/2 \; ; \; P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

A و B حدثان مستقلان معناه: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

المطلوب: حساب ما يلي:

$P(B)$ ؟ : لدينا

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)[1 - P(A)]$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B)[1 - P(A)]$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{2/3 - 1/2}{1 - 1/2}$$

$$\boxed{P(B) = \frac{1}{3}}$$

ج- حساب $P(A/B)$ ؟

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)}$$

$$= P(A)$$

$$= 1/2$$

3 - حساب $P(\bar{B}/A)$ ؟

$$P(\bar{B}/A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A - B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A) - P(A) \times P(B)}{P(A)} = \frac{P(A)[1 - P(B)]}{P(A)}$$

$$= 1 - P(B)$$

$$= 1 - 1/3$$

$$= 2/3$$

التمرين العاشر:

نرمز للطلبة بالرمز A_1 والطالبات بالرمز A_2

والراسبين بالرمز B والناجحين بالرمز $\bar{B}$

لدينا: $P(A_1) = 0,48$ ، $P(A_2) = 0,52$

$P(B/A_1) = 0,05$ ، $P(B/A_2) = 0,25$

1- حساب احتمال أن العزء المختار راسب:

نستعمل قانون الاحتمال الكلي:

$$P(B) = P(A_1) \times P(B/A_1) + P(A_2) \times P(B/A_2)$$
$$= (0,48 \times 0,05) + (0,52 \times 0,25)$$
$$= 0,154$$

2- احتمال أن العزء المختار ناجح:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,154$$
$$= 0,846$$

3- احتمال أن يكون العزء المختار طالب علما أنه راسب:

نستعمل قانون بايز:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1) \times P(B/A_1)}{P(B)}$$

$$= \frac{(0,48 \times 0,05)}{0,154} = 0,156$$

4- احتمال أن يكون العزء المختار طالبة علما أنه ناجح:

$$P(A_2/\bar{B}) = \frac{P(A_2 \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A_2) \times P(\bar{B}/A_2)}{P(\bar{B})}$$

$$= \frac{P(A_2) \times (1 - P(B/A_2))}{1 - P(B)}$$

وصف :

$$P(A_c/\bar{B}) = \frac{0,52 \times (1 - 0,65)}{0,648}$$

$$= 0,46$$

التمرين ١١:

احتمال تأخر الطائرة الأولى : $P(A) = 0,3$

" " " الثانية : $P(B) = 0,1$

ملاحظة: في هذا التمرين الحوادث مستقلة.

المطلوب: حساب ما يلي :

١- احتمال تأخر كلتا الطائرتين :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,3 \times 0,1$$

$$= 0,03$$

٢- احتمال أن تتأخر الطائرة الأولى وتصل الثانية في الوقت المحدد:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P(\bar{B}) = P(A) \times [1 - P(B)]$$

$$= 0,3 (1 - 0,1)$$

$$= 0,27$$

3- احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل في الوقت المحدد :

أي - وصول الطائرة الأولى في الوقت المحدد والثانية متأخرة

أو وصول الطائرة الثانية في الوقت المحدد والأولى متأخرة

أو وصول الطائرتين معا.

$$P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$$

$$= P(\bar{A}) \times P(B) + P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$$

$$= (0,7 \times 0,1) + 0,27 + 0,03$$

$$= 0,37$$