Chapitre 02

SOLLICITATIONS COMPOSEES

1.1 INTRODUCTION

Pour simplifier l'étude des effets des sollicitations, nous avons jusqu'ici considéré les différentes sollicitations séparément. Dans le cas général une section peut être soumise à l'action des six composantes de l'effort internes à savoir (N, T_x, T_y, M_x, M_y, M_z) et qui ont été classées sous quatre catégories de sollicitation ou déformation simple: traction et compression (N), cisaillement (T_x , T_y) torsion M_x et flexion M_y, M_z. Dans la pratique courante, on rencontre rarement des cas où les sollicitations sont simples moins encore ou les six composantes des efforts internes apparaissent en même temps au niveau d'une section.

On rencontre, cependant, différents types de leurs combinaisons. Sous les hypothèses de la résistance des matériaux ces combinaisons peuvent être analysées en utilisant le principe de superposition des efforts. Dans ce chapitre on étudiera la combinaison de deux flexions dite *flexion déviée* et la combinaison de la flexion déviée avec la traction ou la compression communément appelée *flexion composée.*

1.2 FLEXIONDEVIEE

La flexion déviée est le résultat de l'action des forces extérieures agissant suivant un plan différent de ceux des axes principaux de la poutre. Parexempleune panne d'une toiture inclinée soumise à une charge verticale (Fig. 10.1).

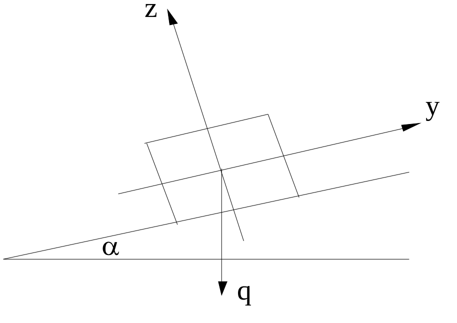

Fig. 1.1

L'étude de la flexion déviée revient à décomposer les sollicitations en deux flexions planes suivant les plans principaux.

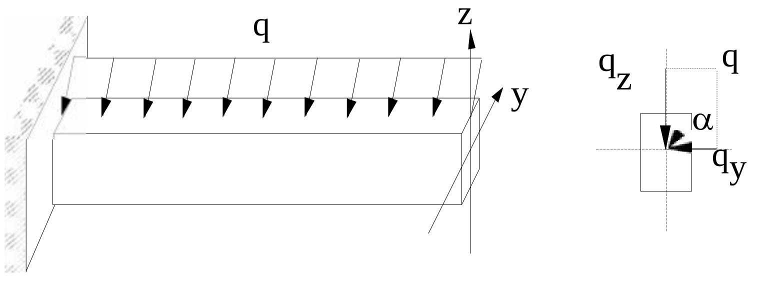

Fig. 1.2

Pour une action simultanée de M_y et M_z, les contraintes en un point de coordonnées y et z se déterminent par la formule :

$$\sigma = \frac{M_Y}{I_Y} z + \frac{M_Z}{I_Z} y \qquad (1\text{-}1)$$

Ce résultat est établi directement en considérant que la flexion déviée comme la somme de deux flexions dirigées suivant les axes centraux d'inertie et en appliquant le principe de superposition.

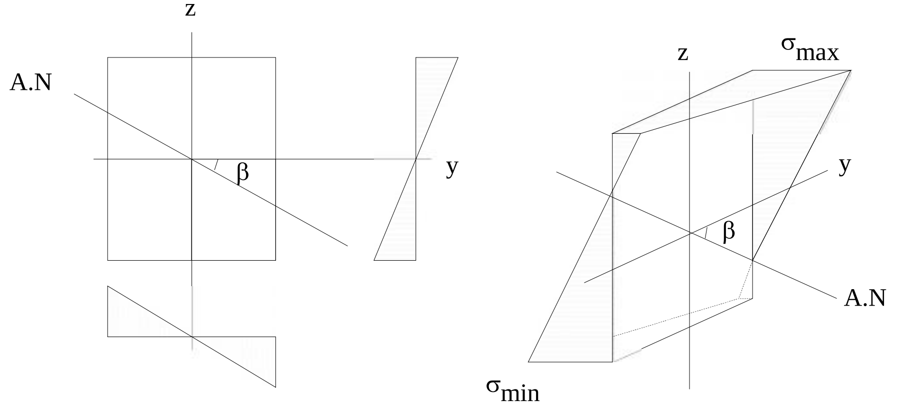

Fig. 1.3

L'axe neutre, défini par $\sigma = 0$, a pour équation:

$$\Rightarrow \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y = 0 \Rightarrow y = -\frac{M_y}{M_z} \times \frac{I_z}{I_y} z \qquad (1\text{-}2)$$

En flexion déviée due à une charge inclinée de α par rapport à l'axe oy on a les relations:

$$M_y = M \cos\alpha$$
$$M_z = M \sin\alpha \qquad (1\text{-}3)$$

Où M est le moment suivant un axe orienté de α par rapport à y-y.

La tangente de l'axe neutre s'écrit alors:

$$\mathrm{tg} = -\frac{M_y}{M_z}\times\frac{I_z}{I_y} = -\mathrm{ctg}\sim\frac{I_z}{I_y} \qquad (1\text{-}4)$$

Et l'expression (10-1) peut être mise sous la forme:

$$\boxed{\Rightarrow \sigma = M\left(\frac{Z\cos\alpha}{I_y} + \frac{Y\sin\alpha}{I_z}\right) \qquad (10\text{-}5)}$$

1.2.1Vérification à larésistance

Le calcul de vérification de la résistance s'effectue à la base des données sur la contrainte totalemaximale.

D'après la formule (10-1) les contraintes maximales se localisent aux points les plus éloignés de l'axe neutre. Pour une section symétrique ona:

$$\sigma_{max} = \left|M_{max}\left(\frac{Y_{max}\sin\alpha}{I_Z} + \frac{Z_{max}\cos\alpha}{I_Y}\right)\right| \leq [\sigma_+] \qquad (10\text{-}6)$$

$$\sigma_{min} = -\left|M_{max}\left(\frac{Y_{max}\sin\alpha}{I_z} + \frac{Z_{max}\cos\alpha}{I_y}\right)\right| \leq [\sigma_-] \qquad (10\text{-}7)$$

10.2.1 Application 1

Dimensionnerunepoutred'untoitsimplementappuyéedelongueurL=4m. Le rapport $\frac{h}{b} = 2$, l'angle entre le toit et l'horizontale est de 25°. La charge verticale q = 0.4 kN/m est répartie sur toute la longueur. on donne $[\sigma] = 10 N/mm^2$, et $E = 10^4 N/mm^2$.

Solution :

$$\sigma_{max} = M_{max}\left(\frac{y_{max}}{I_Z}\sin\alpha + \frac{z_{max}}{I_Y}\cos\alpha\right) \leq [\sigma]$$

$$\text{Avec} \qquad y_{max} = \frac{h}{2},\; z_{max} = \frac{b}{2},\quad I_z = \frac{bh^3}{12} \text{ et } I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$\Rightarrow M_{max}\left(\frac{h\times 12}{2bh^3}\sin\alpha + \frac{12b}{hb^3}\cos\alpha\right) \leq [\sigma]$$

$$M_{max}\left(\frac{6}{bh^2}\sin\alpha + \frac{6}{hb^2}\cos\alpha\right) \leq [\sigma]$$

Pour $\quad h = 2b$

$$M_{max}\left(\frac{6}{b\times 4b^2}\sin\alpha+\frac{6}{2b\times b^2}\cos\alpha\right)\le[\sigma]$$

$$M_{max}\left(\frac{3\sin\alpha}{2b^3}+\frac{3\cos\alpha}{b^3}\right)\le[\sigma]\Rightarrow\frac{3M}{b^3}\left(\frac{1}{2}\sin\alpha+\cos\alpha\right)\le[\sigma]$$

$$b\ge\sqrt[3]{\frac{3M}{[\sigma]}(0.5\sin\alpha+\cos\alpha)}\Rightarrow b=13cm$$

Et $\quad h = 2\times b = 26cm$

1.2.2Application 2

Les poutres ayant un des moments d'inertie principaux très grand par rapport à l'autre sont très sensibles aux déviations des chargements par rapport à l'axe principal de chargement.

Calculer la variation de la contrainte due à une déviation de la charge de 2°.

Considérons le cas d'une console en IPE600 de longueur L = 3.5 m et ayant les caractéristiques géométriques suivantes:

$I_Z = 118.3\times10^7 mm^4$

$I_Y = 4520\times10^4 mm^4$

h = 610mm

b = 224mm

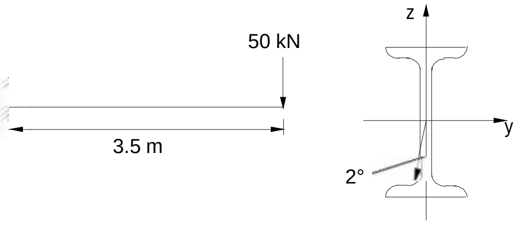

Fig. 1.4

La poutre est sollicitée par une charge P = 50 kN appliquée à son extrémité libre. Calculer la variation de la contrainte pour une déviation de P de 2² par rapport à l'axe z-z

Solution:

Pour une force axée :

On écrit l'équation de l'axe neutre pour déterminer son inclinaison par rapport à l'axe y-y lorsque la force est déviée de 2° par rapport à l'axe de chargement verticalz-z.

$\alpha = 90 - 2 = 88°$

$$tg \ = -\frac{I_Z}{I_Y} ctg\sim = \frac{118.3 \times 10^7}{4.52 \times 10^7} \times ctg88^o = -0.913 \Rightarrow \ = -42.4^o$$

On remarque que l'inclinaison de l'axe neutre est très importante pour une petite déviation de 2°. Les contraintes maximales se trouvent aux points extrêmes de la section.

$M_{Z\,max} = (P\cos\sim)L$ $\quad$ $M_{Ymax}=(P\sin\sim)L$ $\quad$ à l'encastrement

$M_{Zmax}=50\times10^3(\cos2^o)\times3500$

$M_{Ymax}=50\times10^3(\sin2^o)\times3500$

$M_{Zmax}=1.749\times10^8 N.mm$

$M_{Y\,max} = 6.107 \times10^6 N.m$

$$-_{max} = \frac{M_{Zmax} Y_{max}}{I_Z} \pm \frac{M_{Ymax} Z_{max}}{I_Y} = \frac{1.749 \times 10^8 \times 305}{118.3\times10^7} + \frac{6.107 \times 10^6 \times 112}{4520 \times 10^4}$$

$$= 60.23 \ N/mm^2$$

L'augmentation en % de la contrainte due à la déviation de la force est:

$$\frac{-_{max\ deviée} - \pm_{max\ centrée}}{-_{max\ centrée}} \times 100 = 33.5\%$$

1.3 FLEXIONCOMPOSEE

La flexion composée provient de l'action conjuguée d'une flexion due à un chargement latérale et d'un effort axial (traction ou compression) ou seulement de l'effet d'un effort normal excentré par rapport à l'axe moyen del'élément.

1.3.1 Flexion composée avec traction oucompression

C'est le cas général d'une poutre soumise à des chargements transversaux et longitudinaux, ou en une section arbitraire, les efforts M_Z, M_y, T_X, T_y ainsi que N sont présents.

En utilisant le principe de superposition, on peut déterminer la contrainte normale globale en un point quelconque de la section normale par:

$$- = \frac{N_x}{S} + \frac{M_Z}{I_Z} y + \frac{M_Y}{I_Y} z \qquad (1\text{-}8)$$

1.3.2Vérification à la résistance

Pour une section symétrique, la condition de résistance s'écrit :

$$- = \frac{F}{S} \pm \frac{M_Z}{W_Z} \pm \frac{M_Y}{W_Y} \leq [\pm] \qquad (1\text{-}20)$$

Ou pour le cas d'un effort normalexcentré

$$\sigma = \frac{F}{S}\left(1 \pm \frac{z_P}{i_y^2} z_{max} \pm \frac{y_P}{i_z^2} y_{max}\right) \leq [\sigma] \qquad (1\text{-}21)$$

1.3.3 Application

1/ Déterminer les contraintes normales σ_{max} et σ_{min} et la position de l'axe neutre dans la section dangereuse de la poutre ci-dessous :

2/ Si les angles que forme P avec les axes x-x, y-y et z-z sont 30°, 60° et 90° respectivement, déterminer la longueur L maximale de la poutre pour que la contrainte normale maximale ne dépasse pas celle provoquée par la force excentrée.

Solution :

1- Les contraintes, maximale et minimale sont données par:

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{N}{S}\left(1 \pm \frac{z_P}{i_y^2} z_{max} \pm \frac{y_P}{i_z^2} y_{max}\right)$$

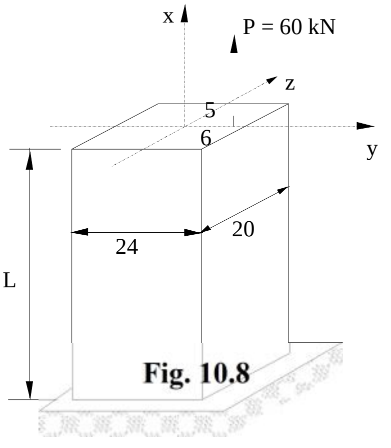

Fig. 10.8

Application numérique

$$i_y^2 = \frac{b^2}{12} = \frac{(240)^2}{12} = 4800mm^2$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{200 \times 240^3}{12} = 2.3 \times 10^8 \ mm^4$$

$$i_z^2 = \frac{h^2}{12} = \frac{200^2}{12} = 3333.3mm^2$$

$$I_Z = \frac{bh^3}{12} = \frac{240 \times 200^3}{12} = 1.6 \times 10^8 \ mm^4$$

$z_P = 60$ mm $\qquad z_{max} = 120$ mm

$y_P = 50$ mm $\qquad y_{max} = 100$ mm

$N = 60\times10^3 N$

$S = 240\times200 = 48000\ mm^2$

$$-_{max,min} = \frac{60 \times 10^3}{48\times\ ^3}\left(1 \quad \frac{60 \times 120}{4800} \pm \frac{50\times100}{3333.3}\right) \Rightarrow \quad \pm_{max} = 5.0N / mm^2 \quad \pm_{min} = -2.5N / mm^2$$

2- La force inclinée par rapport à l'axe moyen de la poutre provoque une flexion composée dont les moments et l'effort normal résultant des projections de la force sur les axes y-y, z-z et x-x sontrespectivement:

$P_x = P\cos\sim$ $\qquad P_y = P\cos$ $\qquad P_z = P\cos ¥$

$N = P_x = P\cos\sim$

$M_y = P_z.L = PL \cos ¥M$

$_z = P_y.L = PL \cos$

$$\sigma = \frac{N}{S} \pm \frac{M_z y_{max}}{I_z} \pm \frac{M_y z_{max}}{I_y}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P\cos\alpha}{S} + \frac{y_{max} PL\cos\gamma}{I_z} + \frac{PL\cos\beta z_{max}}{I_y}$$

$$\Rightarrow \sigma_{max} - \frac{P\cos\alpha}{S} = L\left(\frac{P\cos\gamma y_{max}}{I_z} + \frac{P\cos\beta z_{max}}{I_y}\right)$$

Application numérique

avec σ_{max} = 5 N/mm²

on obtient:

$$5 - \frac{60\times10^3\cos30}{48000} = L\left(\frac{60\times10^3\cos60\times100}{1.6\times10^8} + \frac{60\times10^3\cos90\times120}{2.3\times10^8}\right)$$

$$\Rightarrow L = \frac{3.92}{0.0188} = 209\text{mm}$$