Reciproquement, la connaissance de la valeur du moment statique permet de determiner la position des Centre de gravite :

$$S_{\Omega/\Delta} = \Omega \times d_G \quad \text{avec } \Omega = \sum \Omega_i$$

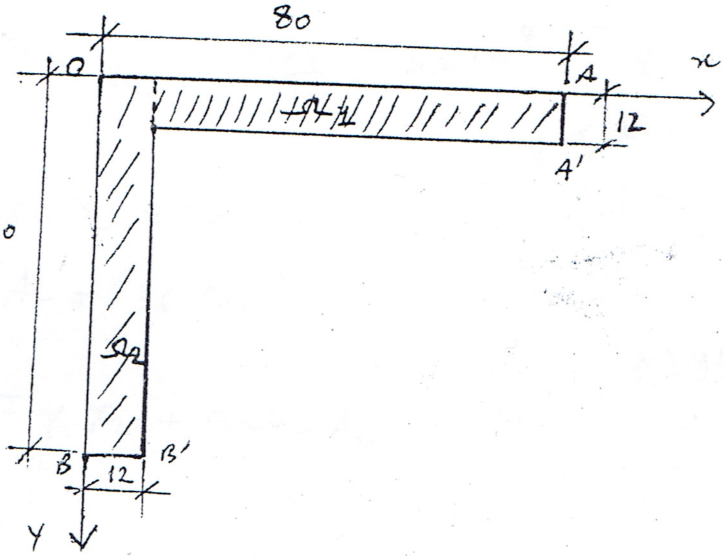
$$\boxed{d_G = \frac{S_{/\Delta}}{\Omega}} = \frac{\sum \Omega_i d_i}{\sum \Omega_i}$$

en ~~pratiquant~~ generalisant :

$$\boxed{\begin{aligned} X_G &= \frac{S_{/y}}{\Omega} = \frac{\sum \Omega_i X_{Gi}}{\sum \Omega_i} \\ Y_G &= \frac{S_{/x}}{\Omega} = \frac{\sum \Omega_i Y_{Gi}}{\sum \Omega_i} \end{aligned}}$$

Application : 1 Exo1

Determiner la position du Centre de gravite de la cornière (80 x 60 x 12)



Elements	Aire	Y_{Gi}	S_i/x	X_{Gi}	S_i/y
Ω_1	$12 \times 68 = 816$	6 y_1	4896	46 x_1	37536
Ω_2	$60 \times 12 = 720$	30 y_2	21600	6 x_2	4320
Ω	1536	/	$S_{/x} = 26496$ mm^3		$S_{/y} = 41856$ mm^3

$$X_G = \frac{S_y}{\Omega} = \frac{\sum x_i \Omega_i}{\sum \Omega_i} = \frac{41856}{1536} = 27{,}25 \text{ mm}$$

$$Y_G = \frac{S_x}{\Omega} = \frac{\sum y_i \Omega_i}{\sum \Omega_i} = \frac{26496}{1536} = 17{,}25 \text{ mm}$$

ication 2: supposons la cornière cornière : 12 x 10 x 4 (cm)

Exo2

sections	1	2
y_i	2	6
x_i	7	2
A_i	24 (4x6)	48
I_{xi}	32	576
I_{yi}	72	64
I_{yixi}	0	0
a_i	3,33	$-1,67$
b_i	$-2,67$	1,33

dans le repère xoy

$$y_G = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{2\times 24 + 6\times 48}{72} = 4,67$$

$$x_G = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{7\times 24 + 2\times 48}{72} = 3,67$$

$$\begin{cases} a_1 = x_1 - x_G = 7 - 3,67 = 3,33 \text{ cm} \\ a_2 = \cancel{x_2 - x_G} = -1,67 \text{ cm} \\ \quad (2 - 3,67) = -1,67 \end{cases}$$

$$b_1 = y_1 - y_G = 2 - 4,67 = -2,67 \text{ cm}$$

$$b_2 = 6 - 4,67 = 1,33 \text{ cm}$$

$$I_{x_1} = \frac{6\times 4^3}{12} = 32 \; ; \; I_{x_2} = \frac{4\times 12^3}{12} = 576 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{4\times 6^3}{12} = 72 \text{ cm}^4 \; ; \; I_{y_2} = \frac{12\times 4^3}{12} = 64 \text{ cm}^4$$

$I_x = \Sigma I_{xi} + S_i a_i^2$

~~$a_i = x_i - x_G$~~

$a_i = y_i - y_G$

$$\begin{cases} I_x = I_{x_1} + b_1^2 A_1 + I_{x_2} + b_2^2 A_2 = 864 \text{ cm}^4 \\ I_y = I_{y_1} + a_1^2 A_1 + I_{y_2} + a_2^2 A_2 = 536 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$I_{xy} = \Sigma I_{y_i x_i} + S_i a_i b_i$

$$I_{yx} = \underset{0}{I_{y_1 x_1}} + a_1 b_1 A_1 + \underset{0}{I_{y_2 x_2}} + a_2 b_2 A_2$$

$$= 3,33 \times (-2,67) \cdot 24 + (-1,67)(1,33)\, 48$$

$$= -213,38 - 106,6 \simeq -320 \text{ cm}^4$$

VII Moments Principaux d'Inertie - Axes Principaux

(variation du moment d'inertie lorsque les axes tournent)

on connaît : A, I_x ; I_y ; I_{xy}, α (système d'axe xoy)

on se propose de calculer I_{x_1} ; I_{y_1} ; $I_{x_1y_1}$ quand l'axe le système d'axe x_1oy_1 a ~~[illegible]~~ fait une rotation α par rapport au premier système xoy.

Ainsi, les valeurs extremes des moments d'inertie (une valeur maximum et une valeur minimum) se presente sous la forme :

$$\boxed{I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2}} \; ; \; \boxed{tg\, 2\alpha = -\frac{2 I_{xy}}{(I_x - I_y)}}$$

- Les axes par rapport auxquels les moments d'inertie prennent leurs valeurs extreme sont appeles <u>axe principaux</u>.
- Les moments d'inertie par rapport aux axes principaux sont appeles <u>moments d'Inertie principaux</u>

Les axes principaux sont determinés par l'angle α avec d'axes ~~auxiliaires~~ le système rectangulaire xoy.

<u>Remarque</u> : $\boxed{I_1 + I_2 = I_x + I_y =}$ constante.

La somme des moments d'inertie par rapport a un système d'axes rectangulaires est une constante

VIII] <u>Rayon de giration</u>

On appelle rayon de giration d'une section autour d'un axe Δ la racine carrée du quotient de son inertie I_Δ par la mesure de sa surface Ω

$$\boxed{i_\Delta = \sqrt{\frac{I_\Delta}{\Omega}}}$$ (unité de longueur)

<u>Application</u> Exo3

3- la cornière precedente 12 x 10 x 4 :

$I_x = 864\ cm^4$

$I_y = 536\ cm^4$

$I_{xy} = -320\ cm^4$

on calcule les axe principaux et les directions principales

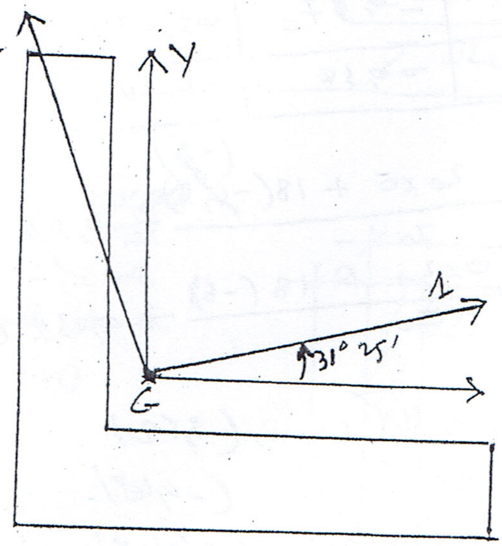
$$I_{1,2} = \frac{864+536}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(864-536)^2+4(-320)^2}$$

$$\begin{cases} I_1 = 1060\ cm^4 \\ I_2 = 340\ cm^4 \end{cases}$$

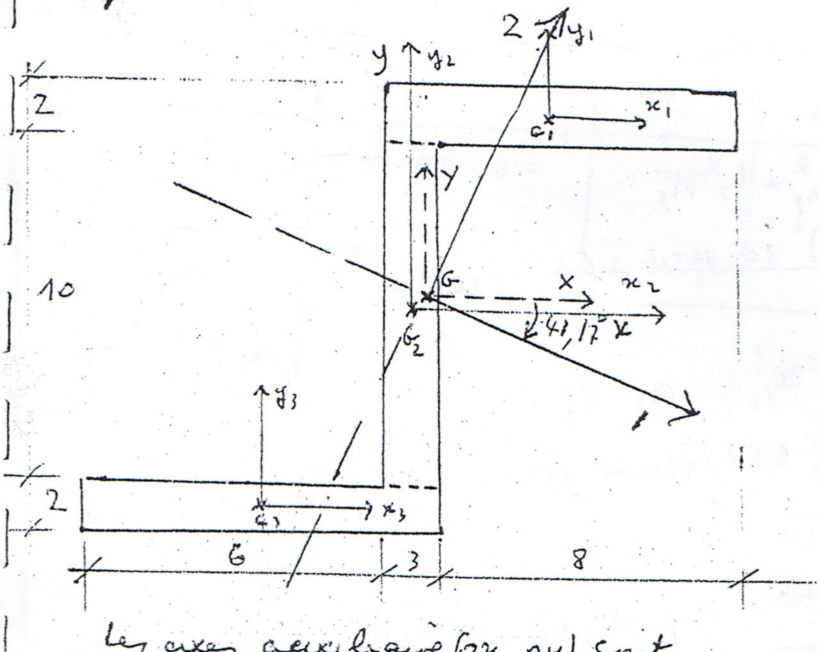
Verification : $I_x + I_y = 864 + 536 = 1060 + 340$
$= 1400\ cm^4$

$$tg\ 2\alpha = -\frac{2(-320)}{(864-536)} = 1{,}9512$$

$\Rightarrow 2\alpha = \cancel{62{,}5}\ 62°\ 51' \Rightarrow \alpha = 31°\ 25'$



4- soit la section ci-dessous : EX04



Les axes auxiliaire (ox oy) sont choisis confondus avec G_2x_2 et G_2y_2.

on demande de calculer les moments d'inertie principaux et les directions principales

– la section totale $A_t = 70\ cm^2$

$$\begin{cases} I_{x_1} = \dfrac{11\times 2^3}{12} = 7{,}33\ cm^4 \\ I_{y_1} = \dfrac{2\times 11^3}{12} = 221{,}8\ cm^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{x_2} = \dfrac{3\times 10^3}{12} = 250\ cm^4 \\ I_{y_2} = \dfrac{10\times 3^3}{12} = 22{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{x_3} = \dfrac{9\times 2^3}{12} = 6\ cm^4 \\ I_{y_3} = \dfrac{2\times 9^3}{12} = 121{,}5 \end{cases}$$

Sections	1	2	3
A_i	22	30	18
x_i	~~5,5~~ (4)	0	~~−4,5~~ (−3)
y_i	6	0	−6
I_{x_i}	7,33	250	6
I_{y_i}	221,8	22,5	121,5
$I_{x_iy_i}$	0	0	0
a_i	4,93	−0,57	−5,07
b_i	5,66	−0,34	−6,34

$$x_G = \frac{\sum A_i x_{Gi}}{\sum A_i} = \frac{22\times \cancel{5,5}^{(4)} + 30\times 0 + 18(\cancel{-4,5}^{(-3)})}{70} = 0,57\ cm \quad (0,48)$$

$$y_G = \frac{\sum A_i y_{Gi}}{\sum A_i} = \frac{22\times 6 + 0\times 30 + 18(-6)}{70} = 0,34\ cm$$

$$a_1 = x_1 - x_G = \cancel{5,5}^{4} - \cancel{0,57}^{0,48} = \cancel{4,93}\ cm \quad (3,52)$$

$$a_2 = x_2 - x_G = 0 - \cancel{0,57}^{0,48} = -0,57\ cm \quad (-0,48)$$

$$a_3 = x_3 - x_G = \cancel{-4,5}_{-3} - \cancel{0,57}_{0,48} = -5,07\ cm \quad (-3,48)$$

$$b_1 = y_1 - y_G = 6 - 0,34 = 5,66\ cm$$

$$b_2 = y_2 - y_G = 0 - 0,34 = -0,34\ cm$$

$$b_3 = y_3 - y_G = -6 - 0,34 = -6,34\ cm$$

$$I_x = I_{x_1} + b_1^2 A_1 + I_{x_2} + b_2^2 A_2 + I_{x_3} + b_3^2 A_3$$

$$= 7,33 + (5,66)^2\times 22 + 250 + (-0,34)^2\,30 + 6 + (-6,34)^2(18)$$

~~$= 1645\ cm^4$~~

$$I_y = I_{y_1} + a_1^2 A_1 + I_{y_2} + a_2^2 A_2 + I_{y_3} + a_3^2 A_3$$

$$= 221,8 + 4,93^2\times 22 + 22,5 + (-0,57)^2\times 30 + 121,5 + (-5,07)^2\,18$$

$$= 1372,6\ cm^4$$

$$I_{xy} = \underbrace{I_{x_1y_1}}_{0} + a_1 b_1 A_1 + \underbrace{I_{x_2y_2}}_{0} + a_2 b_2 A_2 + \underbrace{I_{x_3y_3}}_{0} + a_3 b_3 A_3$$