TD II

Modèle Mathématique

Représentations interne et externe d'un système

Exercice 1

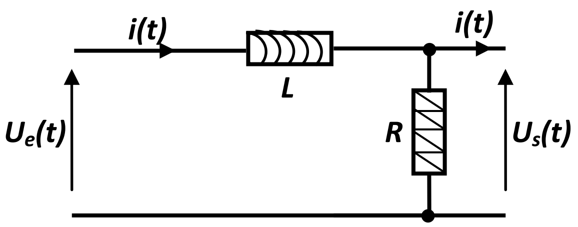
Déterminer les fonctions de transfert des systèmes régis par les équation différentielles suivantes:

1. $\frac{d^2s}{dt^2} + 4\frac{ds}{dt} + 3s(t) = 2e(t)$

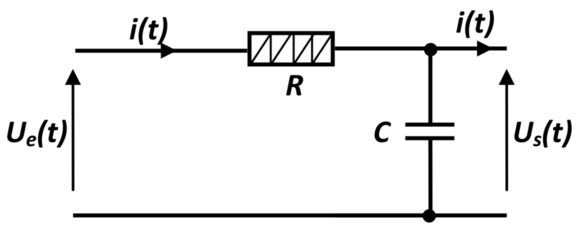
2. $2\frac{d^2s}{dt^2} + 5s(t) = e(t)$

Exercice 2

Déterminer les fonctions de transfert des circuits électriques suivants:



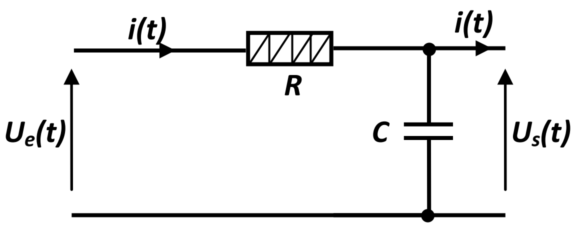
a) Circuit RL



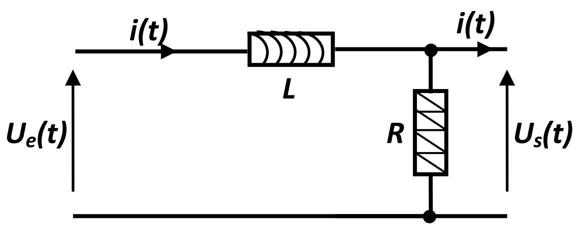
b) Circuit RC

Exercice 3 *(Devoir à faire à la maison et à soumettre par e-mail dans un délais maximum d'une semaine)*

Déterminer le modèle d'état pour chacun des circuits électriques suivants:



a) Circuit RC



b) Circuit RL

Posons que:

circuit (a): x(t)=Vc(t)

L'entrée: Ue(t)

La sortie: y(t)=i(t)

Circuit (b): x(t)=Vl(t)

L'entrée: Ue(t)

La sortie: y(t)=i(t)

Attention: La démonstration détaillée est strictement obligatoire !!!!!!!!!!!

CORRECTIONS

Solution exercice 1

1) $\frac{d^2s}{dt^2} + 4\frac{ds}{dt} + 3s(t) = 2e(t)$

On applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle:

$$p^2S(p) + 4pS(p) + 3S(p) = 2E(p)$$

$$S(p)[3 + 4p + p^2] = 2E(p)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{2}{3+4p+p^2}$$

2) $2\frac{d^2s}{dt^2} + 5s(t) = e(t)$

On applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle:

$$\Rightarrow 2p^2S(p) + 5S(p) = E(p)$$

$$\Rightarrow S(p)[5 + 2p^2] = E(p)$$

$$\Rightarrow G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{5+2p^2}$$

Solution exercice 2

a) Circuit RL

On applique la loi de Kirchhoff sur le circuit, on obtient:

$$U_e(t) = R\, i(t) + L\, \frac{di(t)}{dt} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$U_s(t) = R\, i(t) \dots\dots.\dots\dots.\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$\Rightarrow\ U_e(t) = L\, \frac{di(t)}{dt} + U_s(t)$$

Par l'application de la transformée de Laplace sur les équation (1) et (2), on obtient:

$$U_e(P) = R\, I(p) + L\, P\, I(P)$$

$$\Rightarrow\ U_e(P) = I(P)[R + L\, P] \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

$$U_s(P) = R\, I(P)$$

$$\Rightarrow\ I(P) = \frac{1}{R}\, U_e(P) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

On remplace l'expression (4) dans la relation (3):

$$U_e(P) = \frac{1}{R}\, U_e(P)\, [R + L\, P]$$

$$\Rightarrow U_e(P) = \frac{R + L\, P}{R}\, U_s(P)$$

$$\Rightarrow FT(P) = \frac{U_s(P)}{U_e(P)} = \frac{1}{\frac{R + L\, P}{R}} \quad \Rightarrow \quad FT(P) = \frac{R}{R + L\, P}$$

$$\boxed{FT(P) = \frac{1}{1 + \frac{L}{R}\, P}}$$

La fonction de transfert obtenue est de la forme $FT(P) = \frac{K}{1+\tau\, P}$. Donc, c' est un système du 1er ordre

b) Circuit RC

$$U_e(t) = R\, i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\, dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$U_s(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\, dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (2)$$

$$\Rightarrow U_e(t) = R\, i(t) + U_s(t)$$

Par l'application de la transformée de Laplace sur les équation (1) et (2), on obtient:

$$U_e(P) = R\, I(P) + \frac{1}{C\, P}\, I(P)$$

$$\Rightarrow U_e(P) = I(P)\left[R + \frac{1}{C\, P}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$U_s(P) = \frac{1}{C\, P}\, I(P)$$

$$\Rightarrow I(P) = C\, P\, U_s(P) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (4)$$

En remplace l'expression (4) dans la relation (3):

$$U_e(P) = C\, P\, U_s(P)\left[R + \frac{1}{C\, P}\right]$$

$$\Rightarrow FT(P) = \frac{U_s(P)}{U_e(P)} = \frac{1}{C\, P\left(R + \frac{1}{C\, P}\right)}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad FT(P) = \frac{1}{1 + R\, C\, P}}$$

Système du 1er ordre dont la fonction de transfert obtenue est de la forme standard $FT(P) = \frac{K}{1+\tau\, P}$.