Cours d'Analyse 04 N° 13

Les extrema liés

القيم القصوى المقيدة

Bien souvent le problème de détermination des plus grandes et des plus petites valeurs d'une fonction se ramène à la recherche des maximums et des minimums d'une fonction de plusieurs variables qui ne sont pas indépendantes, mais liées entre elles par certaines conditions (contraintes) supplementaires.

on considère l'exemple suivant :

problème : On demande de fabriquer une boîte parallélépipédique de volume maximum avec une feuille de tôle de surface 2a.

on désigne par la longueur, la largeur et la hauteur de la boîte par x, y, z respectivement. Le problème se ramène par conséquent à la recherche du maximum de la fonction $f(x,y,z) = x.y.z$ où x, y, z verifient la condition $2xy + 2xz + 2yz = 2a$, nous sommes donc en présence du problème de la recherche des extrema liés : les variables x, y, z sont liées par la relation $2xy + 2xz + 2zy = 2a$

dans ce cours nous allons considérer les méthodes de résolution des problèmes de ce genre.

c-à-d dans ce cours on cherche à déterminer les extrema (maximums, minimums) d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui sont liées (les n variables x_i) entre elles par m conditions (relations, contraintes, liaisons) tq $m < n$ c-à-d elles vérifient les m équations

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0. \end{cases}$$

résolution des problèmes d'extrema liés

1) Méthode de substitution طريقة التعويض

$\mathbb{R}^2$ considérons d'abord le problème d'extremum lié d'une fonction de deux variables qui sont liées entre elles par une condition : c-à-d Déterminer l'extrema liés de la fct $f(x,y)$ sous la conditions $\varphi(x,y) = 0$.

on va chercher alors (x_0, y_0) qui vérifie l'équation $\varphi(x_0, y_0) = 0$ et qui rend $f(x_0, y_0)$ un maximum ou un minimum de f.

pour cela on peut si c'est possible ⚠

définir l'une des variables ~~x~~ x ou y de la contrainte $\varphi(x,y) = 0$ en fonction de l'autre variable c-à-d, on essayer d'écrire x en fonction de y ou y en fonction de x

i.e $\varphi(x,y) = 0 \Rightarrow x = \psi(y)$ ou $y = \psi(x)$

et on remplace dans la fonction $f(x,y)$

c-à-d $f(x,y) = f(x, \psi(x))$ ou $f(\psi(y), y)$

qui est une fonction d'une seule variable et le problème sera ainsi ramené à l'étude d'extremum d'une fonction d'une seule variable.

Exemple : Determiner les extrema de la fonction

$f(x,y) = x.y$ sous la condition $x+y=1$

On a $x+y=1 \Rightarrow x = 1-y$, ou bien $y = 1-x$

$$f(x,y) = x.y \Rightarrow f(x, 1-x) = x(1-x)$$

$$= x - x^2 = h(x)$$ une fct d'une seule variable.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

alors f admet un maximum lié en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ qui est $\frac{1}{4}$

هذا المثال يبحث عن ابعاد مستطيل محيطه معلوم
حتى تكون مساحته أكبر ما يمكن.

Rq pour déterminer les extrema liés de la fction $f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ sous la condition $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ on va essayer si c'est possible de définir l'une des variables x_i en fonction des autres variables i.e

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \Rightarrow x_i = \psi(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$$

et on remplace x_i ds la fonction f par ψ on obtien une fct de $n-1$ variable

~~Fxn~~ $F = f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, \psi(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n), x_{i+1}, ..., x_n)$

. ainsi on est amené à un problème d'extrema libre d'une fonction de n-1 variable.

Exemple : Etudier les extrema liés du pb

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3 \\ z^3+3xy=0 \end{cases}$$

On a de la condition $z^3+3xy=0$ $z^3=-3xy$.

on remplace dans la fct f on obtient

$F(x,y) = f(x,y,(-3xy)^{\frac{1}{3}}) = x^3+y^3-3xy$. on est donc devant un pb d'extrema libre d'une fct de deux variables. , on cherche donc les pts critique de F

On a
$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-3y=0 \\ \wedge \\ 3y^2-3x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=y \\ y^2=x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2=x^4 \\ y^2=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=x^4 \\ x^4=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=x^4 \\ x(x^3-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=x^4 \\ x=0 \vee x=1 \end{cases}$$

dons les pts critique sont $(0,0)$, et $(1,1)$

et $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = 6x$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = -3$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 6y$

Alors $\Delta(1,1) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(1,1) = 6 > 0$ alors

$F(x,y)$ admet un minimum en $(1,1)$ et donc

$f(x,y,z)$ admet un minimum lie en $(1,1,-\sqrt[3]{3})$ qui est -1

pour le point critique $(0,0)$ on a

$$\Delta(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$$ alors F n'admet

pas un extremum en $(0,0)$. donc $f(x,y,z)$ n'admet

pas un extremum en $(0,0,0)$.

$\mathbb{R}^n$ + m conditions avec $m < n$:

si on cherche à déterminer les extrema liés d'une fct de n variables sous m conditions par la méthode de substitution on va essayer (si c'est possible) de définir m variables de la fct en fonction des autres variables en utilisant les m conditions (par exemple si on a 5 variables et 3 conditions on va essayer d'écrire 3 variables en fonction des deux autres variables et on remplace dans la fct on sera amené à l'étude des extrema libre d'une fct de $(n-m)$ variables.

Exemple : étudier les extrema de la fct

$f(x,y,z,t) = zt + x^2 - y^2$ sous les conditions

$z + 2t - 3x + y = 0$ et $3z + t - 4x - 2y = 0$

On a des deux conditions

$$\begin{cases} z+2t-3x+y=0 \\ 3z+t-4x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=x-y \\ z=x+y \end{cases}$$

On remplace dans la fct $f(x,y,z,t)$ on obtien une fct de deux variables $F(x,y)=f(x,y,x+y,x-y)$

$$=f(x,y,x+y,x-y)$$

$$=(x+y)\cdot(x-y)+x^2-y^2=2(x^2-y^2)=F(x,y)$$

On sait bien que $F(x,y)$ n'admet pas un extremum alors notre pb n'admet pas un extremum lié.

2) méthode des multiplicateurs de Lagrange.

On rappelle que pour la fct $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\text{gradient } f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

dans cette partie on va donner la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour resoudre les problème des extrema liés

Cas général dans $\mathbb{R}^n$ avec m conditions où $m < n$

Théorème : condition nécessaire d'extrema liés

soit $f, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1.

si f admet un extremum lié en $X_0 \in \mathbb{R}^n$ sous les conditions $\begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \varphi_2(x) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x) = 0 \end{cases}$

et si $\nabla \varphi_i(X_0) \neq 0 \quad \forall \; 1 \leq i \leq m$

Alors $\exists \; \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ tq

$$\nabla f(X_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \nabla \varphi_i(X_0) = 0.$$

c-à-d

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1(X_0) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(X_0) = 0 \end{cases}$$

⚠ Remarque : ce théorème donne une condition nécessaire d'extrema liés. donc pour déterminer les extrema liés de la fct $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sous les contraintes $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, $\dots$, $\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ avec $m < n$ et $f, \varphi_i \in C^1$ par la méthode des multiplicateurs de Lagrange

① On forme d'abord la fonction de Lagrange (ou la fonction auxiliaire)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \lambda_2 \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

② En suite, on cherche les solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \dots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n} = \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} = 0 \\ \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

③ $\underline{\text{Si}}$ $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots \lambda_m^0)$ est une solution de ce système . $\underline{\text{et}}$ $\underline{\text{si}}$ $\nabla \varphi_i(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0) \neq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq m$

$\underline{\underline{\text{Alors}}}$ $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un point critique de la fonction $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ sous les conditions

$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = \quad = \varphi_m(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$

Mais ⚠ il reste encore à déterminer s'il s'agit effectivement d'un extremum.

⚠ dans le cas général cette question reste sans réponse . elle sera resolue . à l'aide de considerations particulières de chaque problème .

Exemple 01 Trouver les extrema de la fct
$f(x,y) = x^2 + y^2$ avec la condition $x + y = 1$

① on forme la fct de Lagrange

$$F(x, y, \lambda) = f(x,y) + \lambda\, \varphi(x,y)$$
$$= x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

② On a le système
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda) = 2x + \lambda = 0 & \text{— ①} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda) = 2y + \lambda = 0 & \text{— ②} \\ \varphi(x,y) = x + y - 1 = 0 & \text{— ③} \end{cases}$$

de ① et ② on obtient $x=y$ et de ③ on a $x=\frac{1}{2}=y$
et $\lambda=-1$.

donc $(x_0, y_0, \lambda_0)=(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$ est une solu du système

alors $(x_0, y_0)=(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ un point critique la fonction $f(x,y)=x^2+y^2$ sous la condition $x+y=1$, il nous reste à vérifier s'il s'agit d'un extremum ou pas.

On a $f(x, 1-x)=x^2+(1-x)^2=x^2+x^2-2x+1=2x^2-2x+1$

$$\Rightarrow f(x,1-x)-f(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})=2x^2-2x+1-\frac{1}{2}$$

$$=2x^2-2x+\frac{1}{2}=2(x^2-x+\frac{1}{4})$$

$$=2(x^2-2\cdot\tfrac{1}{2}x+(\tfrac{1}{2})^2)=2(x-\tfrac{1}{2})^2\geqslant 0$$

Alors $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ est un minimum de la fct $f(x,y)=x^2+y^2$ sous la contrainte $x+y=1$

il claire que $f(x,y)=x^2+y^2$ admet un minimum libre en $(0,0)$ qui est 0

mais dans notre exemple on est dans le cas des extrema liés alors la condition $x+y=1$ a tout changé.

Exemple 02 Determiner les extrema de la fction $f(x,y) = xy$ sous la condition $x - y = 0$.

① On a $F(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x-y)$

② $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x - \lambda = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0) = (0,0,0)$ est une solu du système

donc $(x_0, y_0) = (0,0)$ est un point critique de la fct $f(x,y) = xy$ sous la condition $x - y = 0$

et comme $f(x,x) = x^2 \geq f(0,0) = 0$

Alors f admet un minimum en $(0,0)$ qui 0.

Exemple 03 : Determiner les extrema de la fct $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ sous la condition $xyz = a^3$. $a \in \mathbb{R}^*$

1) On pose $F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda(xyz - a^3)$

② On resout le système $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{cases}$ A $xyz - a^3 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + \lambda z y = 0 & \text{——— } (1) \\ 3y^2 + \lambda z x = 0 & \text{——— } (2) \\ 3z^2 + \lambda x y = 0 & \text{——— } (3) \\ xyz - a^3 = 0 & \text{——— } (4) \end{cases}$$

de (1), (2) et (3) on a $x^3 = y^3 = z^3 \Rightarrow x = y = z$

et de (4) on a $x^3 = a^3 \Rightarrow x = y = z = a$ et $\lambda = -3$

donc $(x_0, y_0, z_0) = (a, a, a)$ est un pt critique de la fct $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ sous la condition $xyz = a^3$, mais de la cdt $xyz = a^3$ on a $z = \dfrac{a^3}{xy}$

donc $f(x, y, z) = f\left(x, y, \dfrac{a^3}{xy}\right) = x^3 + y^3 + \dfrac{a^9}{x^3 \cdot y^3} = g(x, y)$

Alors on a une fct de deux variables et un point critique qui $(x_0, y_0) = (a, a)$ Alors

$$\Delta(a, a) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(a, a) & \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a, a) \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a, a) & \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(a, a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18a & 9a \\ 9a & 18a \end{vmatrix}$$

$= 3^3 a^2 > 0$ donc si $a > 0$ $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(a, a) = 18a > 0$

et donc f admet un minimum en (a, a, a)

si $a < 0$ $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(a, a) = 18a < 0$ et donc f admet un maximum en (a, a, a).

——— o ——— o ———