Cours d'Analyse 04 N° 12

Les extrema libres

القيم القصوى الحرة

Remarque ⚠ dans ce cours les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$

Def : soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ ds $\mathbb{R}$

i.e $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

soit $a \in D_f$

1) On dit que f admet un maximum local « ou relatif » en a ssi : il existe un voisinage de a $V(a)$ tq : $\forall x \in V(a)$ $f(x) \leq f(a)$

2) On dit que f admet un minimum local « ou relatif » en a si : il existe un voisinage de a $V(a)$ tq ; $\forall x \in V(a)$ $f(x) \geq f(a)$

3) On dit que f admet un extremum relatif « ou local » en a si f admet un maximum local ou f admet un minimum lalal en a. et $f(a)$ st appelé l'extrémum de f en à c-à-d $f(a)$ st un maximum ou minimum

locale de f.

4) On dit que f admet un maximum local strict en a si $\forall x \in V(a)-\{a\}$ $f(x) < f(a)$

5) On dit que f admet un minimum local strict en a si $\forall x \in V(a)-\{a\}$ $f(x) > f(a)$

6) On dit que f admet un extremum strict en a si f admet un maximum strict ou f admet un minimum strict en a.

Remarque : 1) On dit un extremum et des extrema ou bien des extremums.

2) Le qualificatif relatif signifie local.

Exemple 1 : soit la fct $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$.

On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = x^2+y^2 \geq 0 = f(0,0)$

c-à-d $\exists V(0,0)$ tq $f(x,y) \geq f(0,0)$

donc d'après la définition 2 f admet un minimum local en $(0,0)$ qui est $f(0,0) = 0$

⚠ Ce minimum est strict car $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

On a $f(x,y) > f(0,0)$

Exemple 02 : soit la fct $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$

On a $f(x,y) = (x-y)^2 \geq 0 = f(0,0) \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

donc f admet un minimum local en $(0,0)$ qui est 0. Mais ⚠ il est à remarquer que ce minimum n'est pas strict car $f(x,y) = (x-y)^2$ peut avoir 0 même si $(x,y) \neq (0,0)$

c-à-d $\forall V(0,0) \; \exists (x_0,y_0) \underset{\text{exemple}}{\overset{\text{par}}{=}} (x_0,x_0)$ tq $x_0 \neq 0$

et $f(x_0,x_0) = (x_0 - x_0)^2 = 0$

⚠ autrement dit la fonction f touche son minimum en plusieurs pts.

Exemple 03 : soit la fct $f(x,y) = (x^2-1)^2 + y^2$

On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; f(x,y) = (x^2-1)^2 + y^2 \geq 0 = f(1,0) = f(-1,0)$

On voit bien dans cet exemple que f touche son minimum en deux pts $(1,0)$ et $(-1,0)$ donc le minimum n'est pas strict sur $\mathbb{R}^2$ ou bien sur un voisinage qui contient les deux pts $(1,0)$ et $(-1,0)$ mais c'est un minimum strict sur par exemple le voisinage de $(1,0)$ $V(1,0)=\mathring{B}((1,0),1)$ la boule ouvert de centre $(1,0)$ et de rayon 1.

Exemple 04 : soit la fct $f(x,y) = 1-(x-1)^2-y^2$

On a $(x-1)^2+y^2 \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

donc $1-(x-1)^2-y^2 \leq 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

c.à.d $f(x,y) \leq 1 = f(1,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Alors f admet un maximum local en $(1,0)$ qui est 1.

Exemple 05 : soit la fct $f(x,y) = \frac{1}{2} - \sin(x^2+y^2)$

si on prend $V(0,0) = \mathring{B}\left((0,0), \sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)$

On a $\forall (x,y) \in V(0,0) \quad 0 \leq x^2+y^2 \leq \frac{\pi}{6}$

donc $\sin(x^2+y^2) \geq 0$

d'où $f(x,y) = \frac{1}{2} - \sin(x^2+y^2) \leq \frac{1}{2} = f(0,0)$

donc f admet un maximum local en $(0,0)$ qui est $\frac{1}{2}$

⚠ Remarque importante

dans l'exemple precedent si on change le voisinage de $(0,0)$ par exemple on prend $V(0,0) = \overset{\circ}{B}\left((0,0), \sqrt{2\pi}\right)$

on peut verifie que pour par exemple (x_0, y_0) tq $x_0^2 + y_0^2 = \frac{3\pi}{2}$ on a $(x_0, y_0) \in V(0,0)$ et

$$f(x_0, y_0) = \frac{3}{2} > \frac{1}{2} = f(0,0)$$

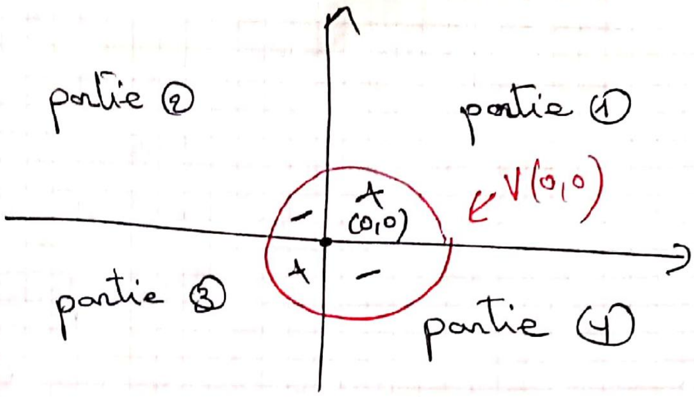
donc pour la même fct mais pour un autre Voisinage de $(0,0)$ $\frac{1}{2}$ n'est pas un maximum de f.

c'est pour cela on les appelle extrema relatifs ou locals.

Exemple 06 : soit la fonction $f(x,y) = xy$

f n'admet pas un extremum en $(0,0)$ car

$f(x,y) - f(0,0) = xy - 0 = xy$ change le signe sur tout voisinage de $(0,0)$



sur la partie 1 on $x > 0$ et $y > 0$ donc le produit $xy > 0$

sur la partie 2 $x < 0$ et $y > 0$ donc $xy < 0$

sur la partie 3 $x < 0$ et $y < 0$ donc $xy > 0$

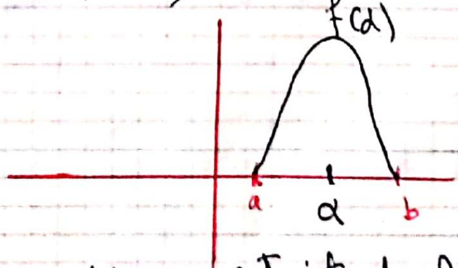
sur la partie 4 $x > 0$ et $y < 0$ donc $xy < 0$

donc pour tout voisinage de $(0,0)$ on a $f(x,y) - f(0,0) = xy$ change le signe

donc f n'admet pas un extremum en $(0,0)$.

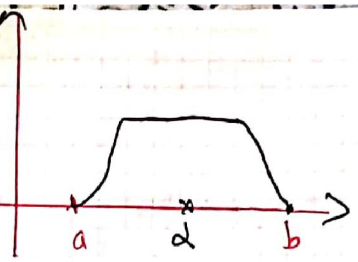
Remarque pour mieux comprendre l'extremum stricte on va prendre le cas d'une fct $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, soit les deux exemples suivants :

1)



$f(\alpha)$ st un maximum strict de f.

2)



$f(\alpha)$ est un maximum de f mais n'est pas strict.

Les extrema globaux "القيم القصوى المطلقة"

Def : soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

soit $a \in D_f$,

1) On dit que f admet un maximum global ou absolu en a si $\forall x \in D_f$. $f(x) \leq f(a)$

2) On dit que f admet un minimum global ou absolu en a si $\forall x \in D_f$ $f(x) \geq f(a)$,

3) On dit que f admet un extremum global ou absolu en a si f admet un maximum global ou f admet un minimum globl en a.

4) L'extremum globl est dit strict si l'inégalité ~~pose~~ dans la définition précedente est stricte.

Exemple : 01 ; soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

tq $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+2x+y^2+2}$.

On a $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+1)^2+y^2+1}$ et comme

$(x+1)^2 + y^2 \geqslant 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

alors $\dfrac{1}{(x+1)^2+y^2+1} = f(x,y) \leq 1 = f(-1,0)$

donc on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \leq f(-1,0) = 1$

d'où 1 est un maximum global de f en $(-1,0)$

⚠ On remarque bien que $0 < f(x,y) \leq 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

et comme $f(x,0) = \dfrac{1}{(x+1)^2+1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

alors f n'admet pas un minimum global.

Exemple 02 : soit la fct $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tq

$f(x,y) = x^2 - x^4 + y^2 - y^4$,

On a $f(x,y) = x^2(1-x^2) + y^2(1-y^2) \geqslant 0 = f(0,0)$

$\forall (x,y) \in]-1,1[\times]-1,1[$ alors f admet

un minimum local en $(0,0)$ mais f n'admet pas

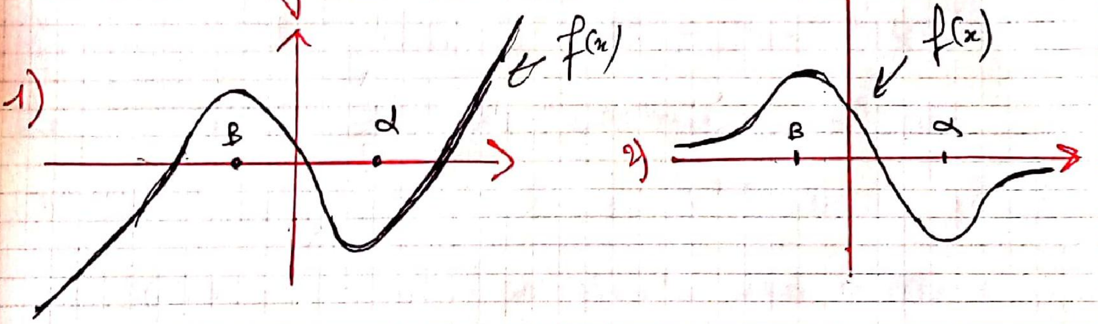
un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. Car $f(x,0) = x^2 - x^4$

$\xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

⚠ Remarque 1) On dit un extremum global ou absolu.

2) si f admet un extremum absolu (global) en a alors f admet un extremum local (relatif) en a mais la reciproque est fausse comme il le montre l'exemple precedent (2)

⚠ pour mieux comprendre on va prendre le cas $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



1) dans l'exemple ① il est tres claire que $f(\beta)$ est un maximum relatif (local) de f et $f(\alpha)$ est un minimum lolal (relatif) de f mais f n'admet pas un extremum global car

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2) pour l'exemple ② il est claire que $f(\alpha), f(\beta)$ sont des extréma absolus et relatifs.

Condition nécessaire pour l'existence d'un extremum

théorème : soit $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

soit $a \in U$ (ouvert) $\subseteq D_f$, on suppose que les dérivées partielles premières existent sur U

Alors pour que f admet un extremum en a il est nécessaire (mais pas suffisant) que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall\ i \in \{1, \dots n\}$$

Remarque 01 dans ce theorème l'existence des dérivées partielles premières est une condition juste pour appliquer le théorème mais pas pour étudier l'existence des extrema

Exemple On prend par exemple la fonction $f(x,y) = |x| + |y|$ il est claire que f admet un extremum (minimum) en $(0,0)$ pourtant les dérivées partielles premières n'existent pas en $(0,0)$.

Déf Dans le cas où $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \ \forall\ 1 \leq i \leq n$ le point a est dit point critique ou pt stationnaire de f.

Remarque 02 le théorème donne une condition nécessaire mais pas suffisante pour que f admet un extremum. c-à-d. il est possible que $\forall 1 \leq i \leq n$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ mais f n'admet pas un extremum en a.

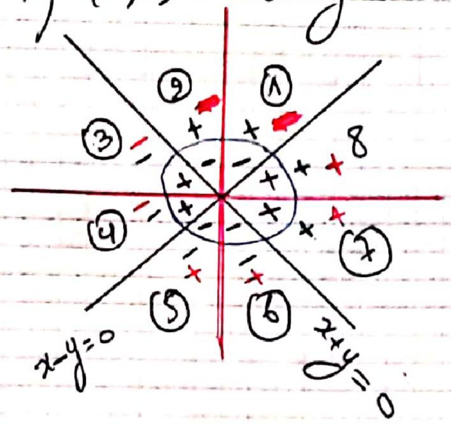
Exemple pour la fct $f(x,y) = x^2 - y^2$

on remarque bien que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ donc f admet des dérivées partielles premières partout sur $\mathbb{R}^2$ alors si f admet des extrema en un pt (x,y) de $\mathbb{R}^2$ alors le pt vérifie d'après le théorème $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ (c-à-d) on cherche les pt critiques ou stationnaires de f.

on a
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \wedge \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ \wedge \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

donc si f admet un ~~pt~~ ~~critère~~ extremum il est en $(0,0)$, alors il ne reste que l'étude de signe de $f(x,y) - f(0,0)$ au voisinage de $(0,0)$.

On a $f(x,y) - f(0,0) = x^2 - y^2 - 0 = (x-y)(x+y)$



partie	1	2	3	4	5	6	7	8
signe de $x+y$	+	+	−	−	−	−	+	+
signe de $x-y$	−	−	−	−	+	+	+	+
produit signe de x^2-y^2	−	−	+	+	−	−	+	+

on voit bien que $f(x,y) - f(0,0)$ change le signe sur tout voisinage de $(0,0)$ donc f n'admet pas un extrémum en $(0,0)$.

Remarque et définition si $a = (a_1, \dots, a_n)$ est un point critique de f et f n'admet pas un extremum en a alors on dit que a est un point col ou un point selle نقطة سرجية

Condition suffisante d'extremum sur $\mathbb{R}^2$

Théorème : Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fct de classe $C^2(U)$ soit $a \in U$ un pt critique de f. i.e $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.

On considère le déterminant suivant :

$$\Delta(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\right)^2$$

Alors : 1) si $\Delta(a) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$

Alors f admet un minimum local en a.

si $\Delta(a) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$

Alors f admet un maximum local en a

2) si $\Delta(a) < 0$ alors f n'admet pas un extremum en a mais un point selle (col) a.

3) si $\Delta(a) = 0$ On ne peut rien dire il est possible qu'il existe ou n'existe pas d'extremum en a. et dans ce cas on peut essayer d'étudier le signe de $f(x,y) - f(a)$ au voisinage de a.

Exemple : Déterminer les extrema de f tq $f(x,y) = 12xy - x^2y - xy^2$

1) On cherche les pts critiques de f.

On a $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \wedge \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12y - 2xy - y^2 = 0 \\ 12x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 12(y-x) - (y+x)(y-x) = 0 \\ \wedge \\ 12x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-x)(12-y-x) = 0 \\ \wedge \\ 12x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (y-x)(12-y-x) = 0 \\ \wedge \\ x(-x-2y+12) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y-x = 0 \\ \wedge \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y-x = 0 \\ \wedge \\ -x-2y+12 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 12-x-y = 0 \\ \wedge \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 12-x-y = 0 \\ \wedge \\ -x-2y+12 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (x,y) = (0,0) \vee (x,y) = (4,4) \vee (x,y) = (0,12) \vee (x,y) = (12,0)$

d'autre part on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 12 - 2x - 2y$

Alors $\Delta(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{vmatrix} = -(12)^2 < 0$ donc

$(0,0)$ est un pt selle (col) et pas d'extremum par f.

$$\Delta(4,4) = \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 48 > 0 \text{ et comme}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,4) = -8 < 0$ alors f admet un maximum local en $(4,4)$ qui $f(4,4) = 4^3 = 64$.

$$\Delta(0,12) = \begin{vmatrix} -24 & -12 \\ -12 & 0 \end{vmatrix} = -144 < 0$$

donc $(0,12)$ est un pt col de f.

$$\Delta(12,0) = \begin{vmatrix} 0 & -12 \\ -12 & -24 \end{vmatrix} = -144 < 0$$

donc $(12,0)$ est un pt col de f.

donc on a un seul extremum de f en $(4,4)$ qui est un maximum local.

⚠ Ce maximum est-il global ??!

on remarque que $f(-4,-4) = 3.4^3 + 4^3 + 4^3 = 64(4) > f(4,4)$ donc le maximum n'est pas global.

Exemple 02 : Etudier les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$ tq $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

On a
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \wedge \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ \wedge \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ \wedge \\ x = y^3 = x^9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ \wedge \\ x(1-x^8) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1 \end{cases}$$

Alors les pts stationnaires de f sont $(0,0)$ $(1,1)$ et $(-1,-1)$. et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4$

$\Delta(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$ alors f n'admet pas un extremum en $(0,0)$ et $(0,0)$ est un pt col.

• $\Delta(1,1) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 128 > 0$ et comme

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 12 > 0$ alors f admet un minimum local en $(1,1)$ qui est $f(1,1) = -2$.

⚠ ce minimum est-il global ??!

On va essayer d'étudier le signe de $f(x,y) - f(1,1)$ sur $\mathbb{R}^2$.

On a $f(x,y) - f(1,1) = x^4+y^4-4xy+2$

$= x^4+y^4-2x^2y^2+2x^2y^2-4xy+2$

$= (x^2-y^2)^2 + 2\left[(xy)^2 - 2(xy) + 1^2\right]$

$= (x^2-y^2)^2 + 2(xy-1)^2 \geqslant 0 \quad \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$

donc ce minimum est global.

Methode 2 : On va essayer d'étudier le signe de $f(1+h,1+k) - f(1,1) \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$

On a $f(1+h,1+k) - f(1,1) = (1-h)^4 + (1+k)^4 - 4(1+h)(1+k) + 2$

$= 1+4h+6h^2+4h^3+h^4+1+4k+6k^2+4k^4-4-4k-4h-4hk+2$

$= (4h^3+6h^2+h^4) + (6k^2+4k^3+k^4) - 4hk + 4$

$= h^2(h^2+4h+6) + k^2(k^2+4k+6) - 4hk + 4$

$= h^2((h+2)^2+2) + k^2((k+2)^2+2) - 4hk + 4$

$= 2h^2 + 2k^2 - 4hk + h^2(h+2)^2 + k^2(k+2)^2 + 4$

$= 2(h-k)^2 + h^2(h+2)^2 + k^2(k+2)^2 + 4 \geqslant 0$

$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$

alors le minimum est global.
