

## CHAPITRE II

### Modèle Mathématique

#### II. Schéma bloc d'un système

##### II.1 Définition

Le schéma bloc dit aussi schéma de principe ou diagramme fonctionnel est un moyen de représentation graphique utile et commode pour les systèmes linéaires. Le schéma bloc permet de déterminer d'une manière simplifiée les relations fonctionnelles entre les différentes parties d'un système complexe comprenant plusieurs unités (sous-systèmes) et leurs commandes. La représentation par le schéma bloc est souvent utilisé en automatique, traitement du signal et au génie chimique.

##### II.2 Eléments d'un schéma bloc

Comme le montre la figure 2.1, le schéma bloc est essentiellement constitué de blocs fonctionnels, lignes d'action, jonctions et des sommateurs.

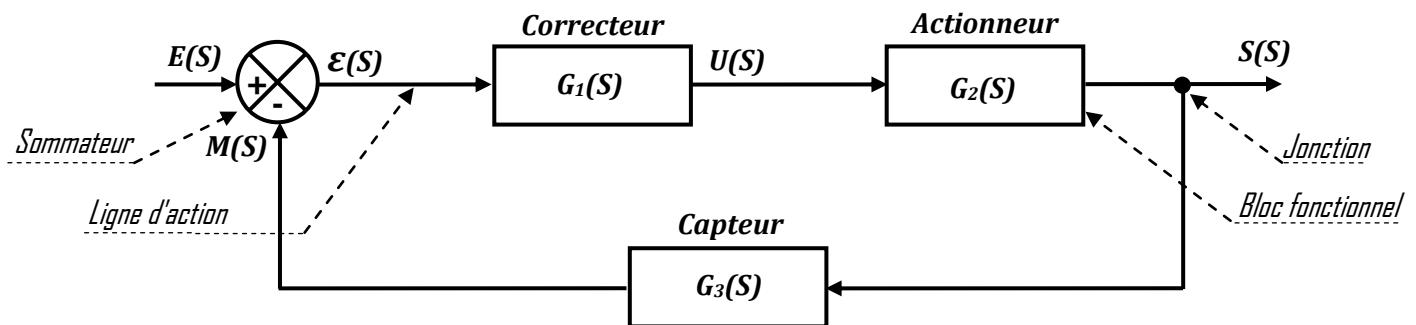


Figure 2.1 Forme générale d'un schéma bloc

- **Bloc fonctionnel:** Il est appelé aussi "**la transmittance**", et c'est un élément rectangulaire représentant une des fonctions du système et portant la fonction de transfert qui définit le rôle de l'élément dans le système (Correcteur, actionneur ou capteur). Parfois, le bloc fonctionnel est accompagné d'une description représentant une fonction mathématique tels que, le dérivateur, l'intégrateur et le gain.
- **Ligne d'action:** Les blocs fonctionnels sont reliés entre eux par des flèches appelés les lignes d'action ou les liens, ces flèches portent les signaux entrants et les signaux sortants ( $\varepsilon(S)$ ,  $U(S)$ ,  $S(S)$ ) décrivant les variables intermédiaires du système.
- **Jonction:** C'est un point de branchement qui permet le prélèvement d'une information (signal) en une des lignes d'action.
- **Sommateur:** Le sommateur est un élément qui permet de réaliser algébriquement l'addition ou la soustraction entre les différentes variables du système, Il comporte plusieurs entrées et une seule sortie. lorsqu'il est utilisé pour le calcul de la différence de deux signaux, le sommateur sera appelé "**comparateur**" (généralement utilisé dans les systèmes asservis (systèmes à boucle de régulation)).

### **II.3 Procédure de constitution d'un schéma bloc**

Pour tracer le schéma bloc d'un tel système, il s'agit de Tirer le maximum d'équations différentielles régissent le comportement du système et la simplification de ces équation afin d'obtenir un schéma fonctionnel plus simple dans le domaine temporel. Puis déterminer la fonction de transfert de chaque constituant afin de construire le schéma bloc dans le domaine fréquentiel (domaine de Laplace).

A titre d'exemple, nous allons construire le schéma bloc du circuit RL que l'on présente sur la figure 2.2 et qu'on la suppose un système linéaire, ce que signifie que la valeur de L est complètement indépendante du niveau de courant  $i(t)$ .

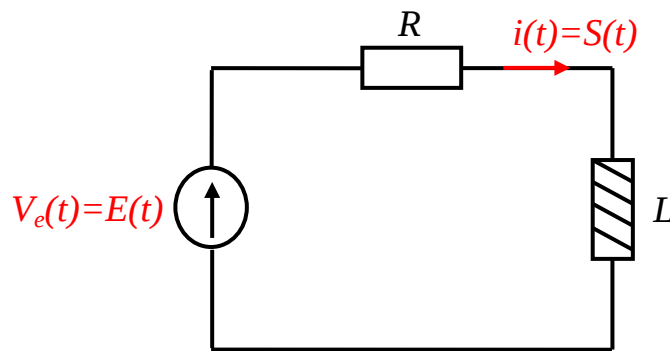


Figure 2.2 Schéma électrique du circuit RL

$$V_e(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L} i(t) + \frac{1}{L} V_e(t)$$

→ On a obtenu une seule équation différentielle d'ordre 1, donc, le circuit mise à l'étude représente un système du premier ordre.

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L} (V_e(t) - R i(t))$$

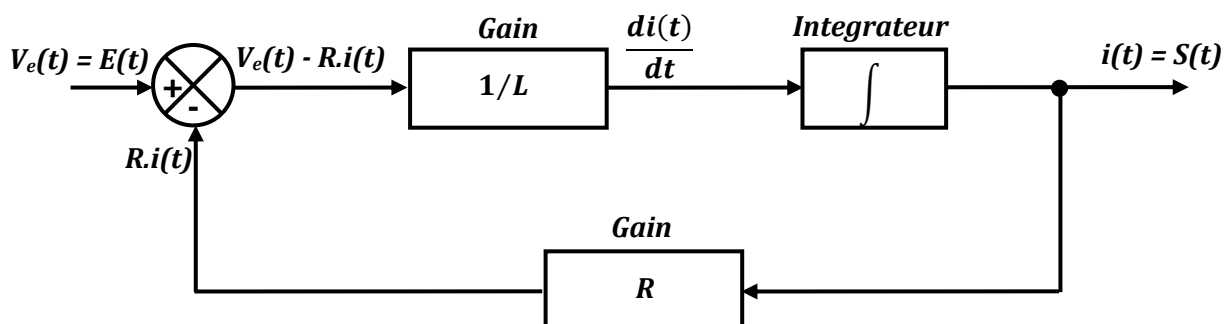


Figure 2.3 Schéma bloc du circuit RL dans le domaine temporel

Maintenant, nous allons déterminer la fonction de transfert  $FT(S) = \frac{S(S)}{E(S)} = \frac{I(S)}{V_e(S)}$

$$\begin{cases} V_e(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \\ i(t) = S(t) ; V_e(t) = E(t) \end{cases} \quad (1)$$

On applique la transformée de Laplace (S) sur le système d'équation (1):

$$\begin{cases} E(S) = V_e(S) = R I(S) + L S I(S) \\ S(S) = I(S) \end{cases} \quad (2)$$

Après simplification on obtient le système d'équation suivant:

$$\begin{cases} E(S) = V_e(S) = I(S)(L S + R) \\ S(S) = I(S) \end{cases} \quad (3)$$

Remplaçant  $I(S)$  par  $S(S)$  dans l'expression de  $E(S)$ :

$$E(S) = S(S)(L S + R) \quad (4)$$

Donc,

$$FT(S) = \frac{S(S)}{E(S)} = \frac{1}{L S + R} \quad (5)$$

Le schéma bloc dans le domaine fréquentiel de Laplace se représentera comme suite:

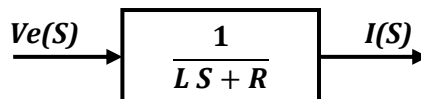


Figure 2.4 Schéma bloc du circuit RL dans le domaine fréquentiel de Laplace



### **Remarques:**

- Une règle de base implicitement impose la non-utilisation des dérivateur dans la construction des schémas bloc qui sont physiquement irréalisables.
- Les éléments dynamiques à disposition dans la construction des schémas bloc ne sont que des intégrateurs, des gains et comparateurs.
- Le nombre d'intégrateurs nécessaires à utiliser dans la construction des schémas bloc égale à  $n$  qui représente le degré du système mise à l'étude et ainsi que le nombre d'équations différentielles qu'on peut les tirer du système (un seul intégrateur utilisé dans le cas étudié).
- Pour la détermination du gain statique du système, on peut raisonner sur le schéma bloc obtenu dans le domaine temporel d'où l'équilibre du système est atteint dès que le signal d'entrée à l'intégrateur est nul ( dans le cas mise à l'étude  $\frac{di(t)}{dt} = 0$  ). On a donc,  $\frac{1}{L} (V_e(t) - R i(t)) = 0$ , ce qui implique que  $\frac{1}{L} V_e(t) = \frac{R}{L} i(t)$ . Par conséquent, le gain statique définit par  $K = \frac{S(t)}{E(t)}$  à l'équilibre et égale à  $\frac{1}{R}$ .

## **II.4 Constitution d'un schéma bloc pour la moteur à courant continu**

La figure 2.5 représente le schéma équivalent d'un moteur à courant continu à excitation indépendante (séparée). Electriquement, le moteur à courant continu à excitation peut être modélisé un ensemble de résistance, inductance et générateur montés en série, représentant la partie rotorique, alors que le stator est représenté par une inductance.

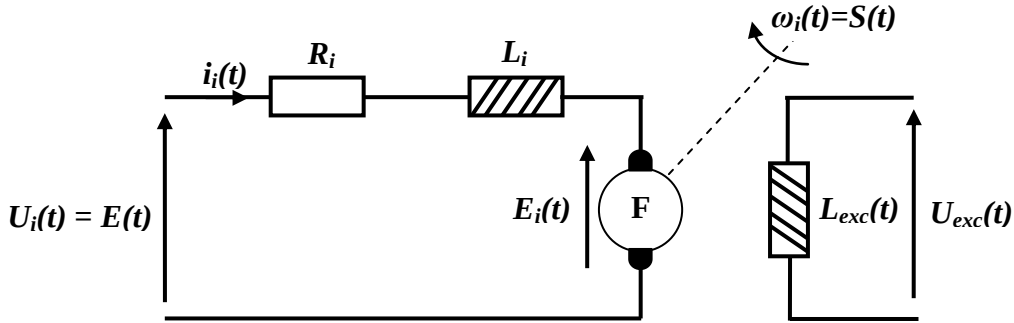


Figure 2.5 Schéma électrique équivalent de la machine à courant continu à excitation séparée

### **II.4.1 Dans le domaine temporel**

basant sur l'application de la loi des mailles sur le schéma équivalent du moteur, on écrit l'équation différentielle reliant le courant d'induit  $i_i(t)$  à la tension de commande  $U_i(t)$  dans le circuit rotorique comme suite:

$$U_i(t) = R_i i_i(t) + L_i \frac{di_i(t)}{dt} + E_i(t) \quad (6)$$

Le couple développé par le moteur est proportionnel au courant circulant dans le circuit d'induit selon la relation:

$$C_{em}(t) = K_c \cdot i_i(t) \quad (7)$$

Lorsque le rotor est mise en rotation, une force électromotrice est induite en opposition de la tension d'alimentation, cette force est appelée la force contre-électromotrice qu'est proportionnel à la vitesse de rotation de l'arbre du moteur selon la formule suivante:

$$E_i(t) = K_E \cdot \omega_i(t) \quad (8)$$

Les coefficients  $K_c$  et  $K_E$  sont physiquement égaux et représentent la constante de couple du moteur qui dépend du flux de l'inducteur et la constante de la force contre-électromotrice du moteur, respectivement.

La charge à entrainer par le moteur influe directement la vitesse de l'arbre, ces influences sont caractérisés par l'inertie qu'elle ramène sur l'arbre du moteur  $J_i(t)$ , le couple résistant qui s'oppose au mouvement de rotation  $C_r(t)$  et le couple de frottement due à la liaison pivot entre l'arbre et le flasque palier et qui est aussi en opposition avec le mouvement de rotation et défini par:

$$C_f(t) = K_f \cdot \omega_i(t) \quad (9)$$

la loi dynamique du mouvement est décrit par la relation suivante:

$$J_i \frac{d\omega_i(t)}{dt} = C_{em}(t) - C_r(t) - K_f \cdot \omega_i(t) \quad (10)$$

Pour tracer le schéma fonctionnel du moteur on doit déterminer tout d'abord l'expression du courant d'induit qu'on peut la tirer à partir de la relation (1):

$$\frac{di_i(t)}{dt} = \frac{1}{L_i} (U_i(t) - R_i i_i(t) - E_i(t)) \quad (11)$$

Remplaçant la force contre-électromotrice  $E_i(t)$  par sa valeur qui est  $K_E \cdot \omega_i(t)$ , on obtient la relation liant la variable d'entrée qui est la tension de commande  $U_i(t)$  et la variable de sortie  $\omega_i(t)$ :

$$\frac{di_i(t)}{dt} = \frac{1}{L_i} (U_i(t) - R_i i_i(t) - K_E \cdot \omega_i(t)) \quad (12)$$

la relation (12) nous permet de tracer une grande partie du schéma bloc dans le domaine temporel comme le représente la figure 2.6.

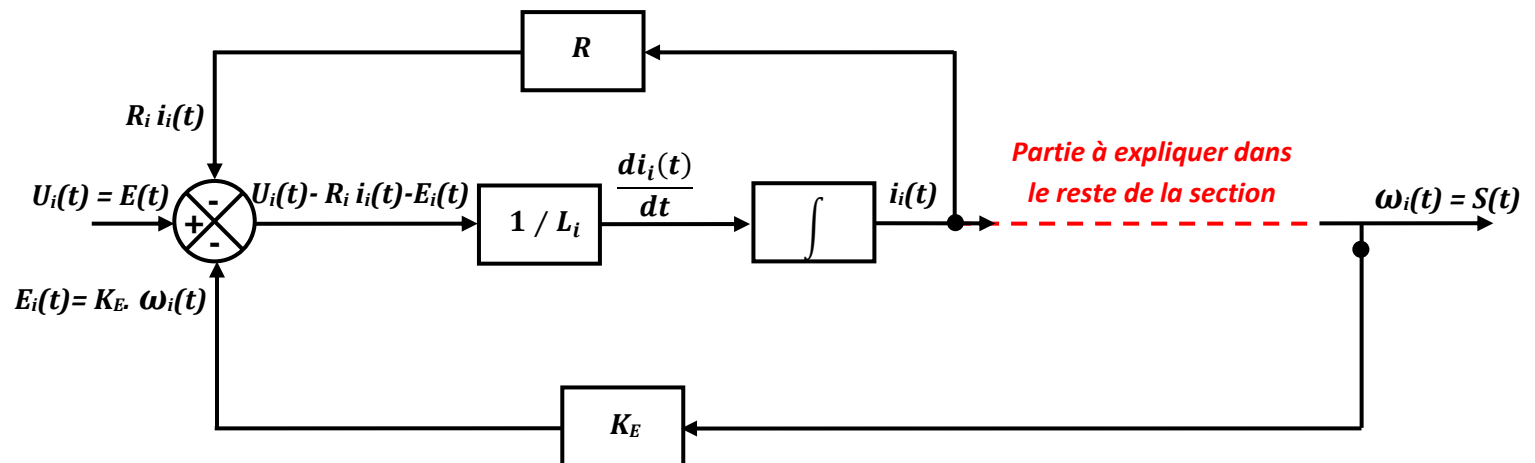


Figure 2.6 Schéma bloc tracé à partir de l'équation (12)

Puisque le signal du courant d'induit est disponible selon la figure 2.6, la partie de schéma bloc qui représente le couple électromagnétique est donc possible à construire en utilisant l'équation (7):

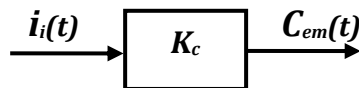


Figure 2.7 Schéma bloc tracé à partir de l'équation (7)

A partir de loi dynamique on peut exprimer la dérivée de la vitesse de rotation (l'accélération) par l'équation suivante:

$$\frac{d\omega_i(t)}{dt} = \frac{1}{J_i} (C_{em}(t) - C_r(t) - K_f \cdot \omega_i(t)) \quad (13)$$

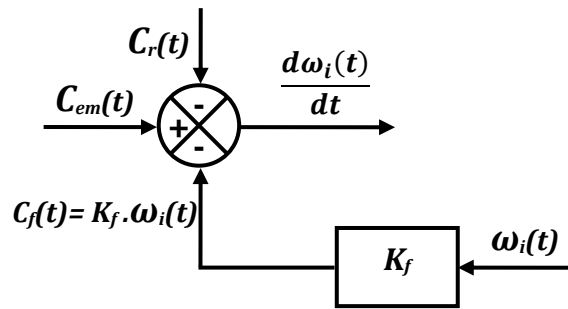


Figure 2.8 Schéma bloc tracé à partir de l'equation (13)

Finalemnt, il suffit d'utiliser un intégrateur dont l'entrée est la dérivée de vitesse afin d'obtenir la le signale de vitesse en sortie. Le schéma bloc finale devient comme le représente la figure 2.9.

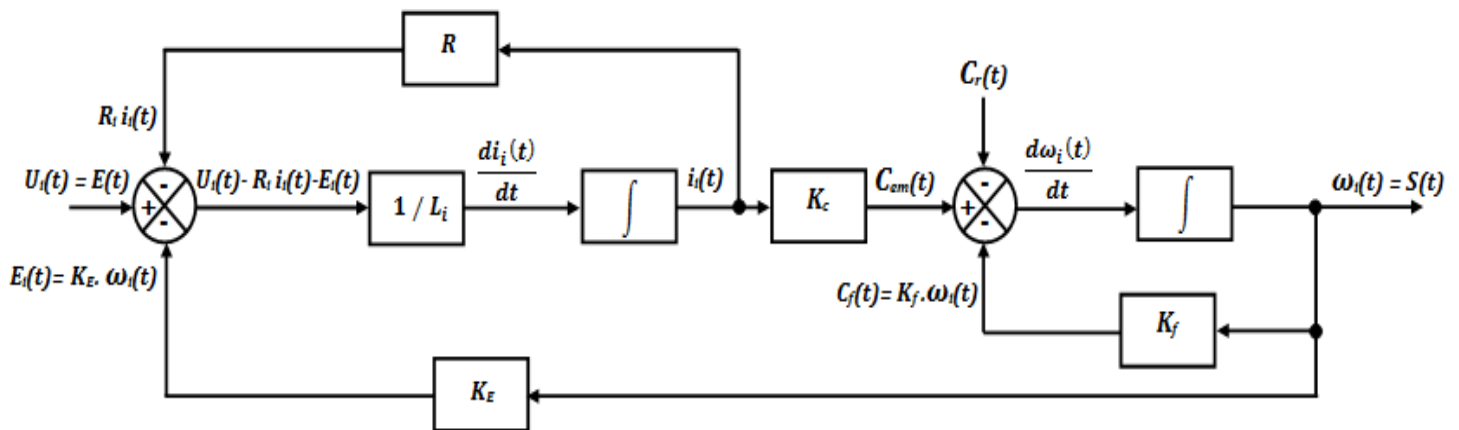


Figure 2.9 Schéma bloc dans le domaine temporel d'un moteur à courant continu à excitation séparée

#### II.4.2 Dans le domaine fréquentiel

Pour tracer le schéma bloc dans le domaine fréquentiel, Nous devons appliquer la transformée de Laplace sur toutes les variables, soit:

$$L(U_i(t)) = U_i(S);$$

$$L(\omega_i(t)) = \omega_i(S);$$

$$L(E_i(t)) = E_i(S);$$

$$L(C_{em}(t)) = C_{em}(S);$$

$$L(i_i(t)) = I_i(S);$$

$$L(C_r(t)) = C_r(S);$$

Pour transformer la première partie du schéma bloc représentée par la figure 2.6 du domaine temporel au domaine fréquentiel, on applique la transformée de Laplace sur la relation (12) que nous avons l'utilisé pour tracer cette partie schéma:

$$\frac{di_i(t)}{dt} = \frac{1}{L_i}(U_i(t) - R_i i_i(t) - K_E \cdot \omega_i(t)) \xrightarrow{L} SI_i(S) = \frac{1}{L_i}(U_i(S) - R_i I_i(S) - K_E \cdot \omega_i(S)) \quad (14)$$

Dans cette partie, on suppose que le signal de sortie est le courant  $I_i(P)$ , la formule (14) devient:

$$SI_i(S) = \frac{1}{L_i} (U_i(S) - K_E \cdot \omega_i(S)) - \frac{R_i}{L_i} I_i(S) \quad (15)$$

que l'on met sous la forme:

$$I_i(S) \left( S + \frac{R_i}{L_i} \right) = \frac{1}{L_i} (U_i(S) - K_E \cdot \omega_i(S)) \quad (16)$$

Après simplifications on écrit l'expression par la relation suivante:

$$I_i(S) = (U_i(S) - K_E \cdot \omega_i(S)) \frac{1}{R_i + L_i S} \quad (17)$$

ce qui nous permet de tracer une grande partie du schéma bloc représentée la figure 2.10.

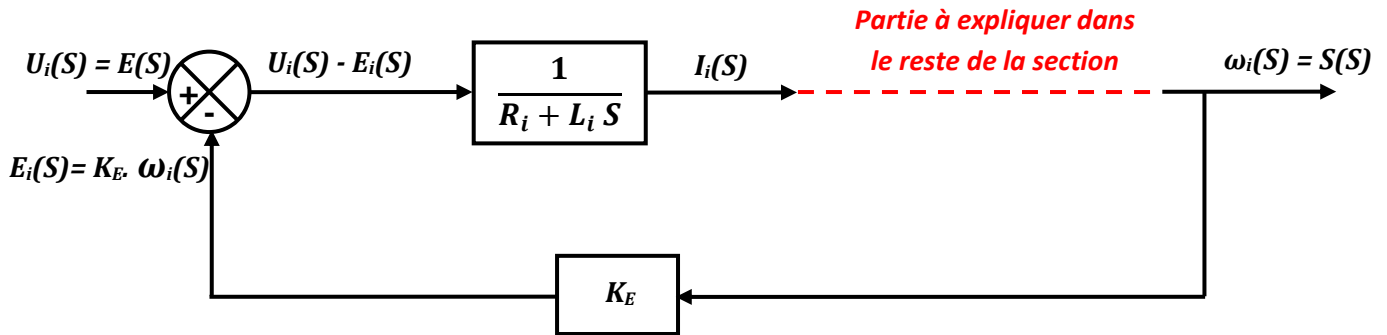


Figure 2.10 Schéma bloc représentant le signal de courant  $I_i(S)$

Tant qu'on a obtenu la variable  $I_i(S)$ , il suffit d'appliquer la transformée de Laplace sur l'expression du couple (7) pour obtenir le signal  $C_{em}(S)$  défini par:

$$C_{em}(S) = K_c \cdot I_i(S) \quad (18)$$

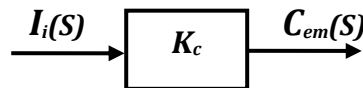


Figure 2.11 Schéma bloc représentant le signal du couple électromagnétique  $C_{em}(S)$

Appliquant la transformée de Laplace sur la loi dynamique exprimée par la relation (13):

$$S \omega_i(S) = \frac{1}{J_i} C_{em}(S) - \frac{1}{J_i} C_r(S) - \frac{1}{J_i} K_f \omega_i(S) \quad (19)$$

que l'on réécrit sous la forme:

$$\left( S + \frac{1}{J_i} K_f \right) \omega_i(S) = \frac{1}{J_i} (C_{em}(S) - C_r(S)) \quad (20)$$

Alors, la vitesse de rotation qui représente la variable de sortie du moteur sera exprimé par:

$$\omega_i(S) = (C_{em}(S) - C_r(S)) \frac{1}{K_f + J_i S} \quad (21)$$

Schématiquement, on peut traduire cette expression au schéma bloc présenté sur la figure 2.12.

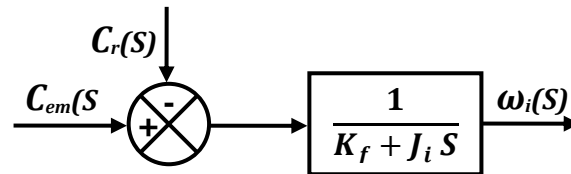


Figure 2.12 Schéma bloc représenatant le signale de la vitesse de rotation  $\omega_i(S)$

À partir de ces schémas bloc élémentaires, on construit le schéma bloc final du moteur illustrée dnas la figure ci-desssous.

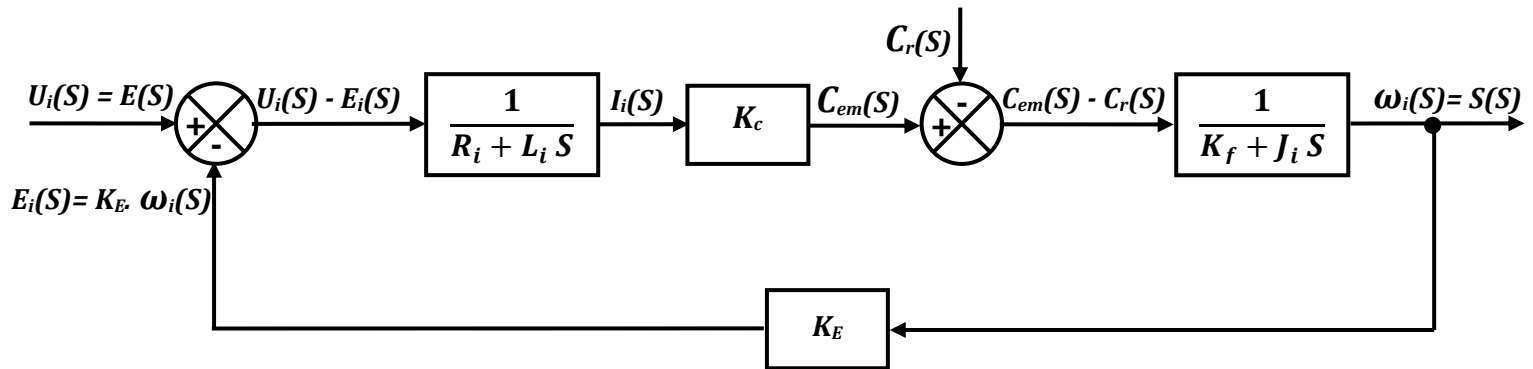


Figure 2.13 Schéma bloc dans le domaine fréquentiel d'un moteur à courant continu à excitation séparée