وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة الجيلالي بونعامة — السنة الجامعية 2021/2020
كلية العلوم الاقتصادية و علوم التسيير — قسم العلوم الاقتصادية . التسيير , ال
السنة اولى جذع مشترك (LMD) — المقياس : الجبر الخطي

السلسلة رقم 1 : الفضاءات الشعاعية (Les Espaces Vectoriels)

ملاحظة : نعتبر في كل ما يأتي ان,$(R, +, \cdot)$ جسم تبديلي $(+), (\cdot)$ عمليتي الجمع واضرب العادي

تمرين 1 :

ليكن $(R^3, +, \cdot)$ فضاء شعاعي على R بين هل المجموعات التالية تشكل فضاءات شعاعية جزئية من R^3

$$E_1 = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x + 2y - z = 2\}$$

$$E_2 = \{(x, y, z) \in R^3 \mid 2x + yz < 1\}$$

$$E_3 = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x + 2yz = 0\}$$

$$E_4 = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 - y + z = 0\}$$

تمرين 2 :

هل المجموعات التالية فضاءات شعاعية جزئية :

$$F_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \; est \; pair\}. sur \; \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$F_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \; est \; impair\}. sur \; \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

تمرين 3 :

من اجل كل عدد حقيقي β نعرف المجموعة الجزئية E ل R^3 كما يلي :

$$E = \{(x, y\, z) \in R^3 \mid \beta x + y + z = 0; x + \beta y + z = 0\}$$

1. اثبت ان E فضاء شعاعي جزئي ل R^3
2. ناقش حسب قيم العدد الحقيقي β وجود اساس ل E ثم استنتج بعده $\dim(E)$
3. ما هو شرط العدد الحقيقي β حتى يكون الشعاع $v = (1, \quad 1, \quad \beta) \in E$

تمرين 4 :

لدينا الاشعة التالية : $U_1 = (1, \quad 1, \quad 1);\ U_2 = (2, \quad -2, \quad -1);\ U_3 = (1, \quad 1, \quad -1)$

لدينا المجموعة التالية :

$$E: \{(x, y, z) \in R^3 \mid x + z = 0\}$$

$$F: Vect\ \langle U_1; U_2 \rangle$$

1. بين ان E فضاء شعاعي جزئي $(S.E.V)$ من R^3 عين اساس ل E
2. ادرس الاسقلال او الارتباط الخطي للاشعة التالية $\langle U_1; |U_2; |U_3 \rangle$
3. هل $U_3 \in F;\ U_3 \in \mathrm{E}$
4. عين اساس $E \cap F$
5. ليكن الشعاع $(-1, \quad 7, \quad 5)$ هل $U_4 = (-1, \quad 7, \quad 5)$ $\boldsymbol{U_4 \in F, U_4 \in E}$

تمرين 5 :

لدينا المجموعة E من $R_3[\![X]\!]$ المعرفة كما يلي :

$$E: \{P \in R_3[\![X]\!] \mid P'(0) = P''(0) = 0\}$$

P'' و P' يمثلان المشتق من الدرجة الاولى و الثانية على التوالي

1. بين ان E فضاء شعاعي جزئي
2. عين اساس لE و بعد ل $\dim E$

تمرين 6 :

بين ان المجموعة $\{P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x)\}$ مستقلة خطيا حيث :

$$P_1(x) = 3x - 2x^2 + x^3, \quad P_2(x) = -3 + x^2 + 2x^3, \quad P_3(x) = -2x^2 + 2x^3$$

تمرين 7 :

لدينا المجموعات التالية :

$$E: \{(x, y, z) \in R^3 \mid x + y + z = 0\}$$

$$F: \{(x, y, z) \in R^3 \mid x + y = 2z\}$$

1. بين ان $E\ et\ F$ يشكلان فضاءات شعاعية جزئية
2. عين اساس لكل من $F\ et\ E$
3. عين الفضاء الشعاعي الجزئي $E \cap F$ ثم عين اساسه
4. ما هو بعد كل من $E,\ F\ et\ E \cap F$

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة الجيلالي بونعامة
كلية العلوم الاقتصادية و علوم التسيير
السنة اولى جذع مشترك (LMD)

السنة الجامعية 2021/2020
قسم العلوم الاقتصادية . التسيير , ال
المقياس : الجبر الخطي

السلسلة رقم 2 : التطبيقات الخطية (Les Applications Linéaires)

تمرين 1 :

1. بين هل التطبيقات التالية خطية

a. $f_1: R^3 \to R^4$
$f_1(x,\ \ y,\ \ z) = (x,\ \ x-z,\ \ xy+2z,\ \ y+z)$

b. $f_2: R^3 \to R$
$f_2(x,\ \ y,\ \ z) = (x+y+2z)$

c. $f_3: R^2 \to R^2$
$f_3(x,\ y) = (0,\ |y|)$

d. $f_4: R^2 \to R^2$
$f_4(x,\ y) = (\sin(x),\ \ y)$

e. $f_5: R_3[\![X]\!] \to R^3$
$f_5(P) = \big(P(-1),\ \ P(0),\ \ P(1)\big)$

تمرين 2 :

ليكن f تطبيق خطي معرف كما يلي : $f: R^3 \to R$:

عين التطبيق f بحيث: $f(1,\ \ 1,\ \ 2) = 4 \quad f(2,\ \ 0,\ \ 1) = 1 \quad f(1,\ \ 1,\ \ 1) = 0$

1. عين $ker\ (f), et\ Im\ (f)$
2. عين $dim\big(ker\ (f)\big), et\ dim\ \big(Im\ (f)\big)$

تمرين4:

ليكن F و E فضائيين شعاعيين ذو ابعاد p و n على التوالي

ليكن $f: E \to F$ تطبيق خطي

1. برهن اذا كان $n < p$ اذن التطبيق f ليس غامر
2. برهن اذا كان $p < n$ اذن التطبيق f ليس متباين

« Trouver quelque chose en mathématiques, c'est vaincre une inhibition et une tradition »

« Laurent Schwartz

تمرين 5 :

الفضاء الشعاعي R^3 مزود بأساس القانوني «$B = (e_1;\ \ e_2;\ \ e_3)$

$v_1 = 2e_1 - e_2 + e_3;\quad v_2 = -e_1 + e_2 + e_3;\quad v_3 = e_2 + 3e_3;\ \ v_4 = -e_1 - 2e_2 + e_3;$

F تطبيق خطي من R^3 الى R^3 معرف كما يلي :

$$f(e_1) = v_1 \qquad f(e_2) = v_2 \qquad f(e_3) = v_3$$

1. عين صورة الشعاع $X = (x,\ \ y,\ \ z)$ بالتطبيق f في الاساس B
2. بين ان $v_1\ et\ v_2$ مستقلين خطيا
3. عين اساس ل $im(f)$
4. بين ان $f(v_4) = 0_{R^3}$ ثم عين $ker(f)$

تمرين 6 :

الفضاء الشعاعي R^3 مزود بأساس القانوني «$B = (e_1;\ \ e_2;\ \ e_3)$

ليكن f تطبيق خطي من R^3 الى R^3 معرف كما يلي :

$$f(e_1) = 2e_1 + e_2 + e_3 \qquad f(e_2) = e_2 - e_3 \qquad f(e_3) = -e_2 + e_3$$

1. عين صورة الشعاع $X = (x,\ \ y,\ \ z)$ بالتطبيق f في الاساس B
2. احسب $f^2(e_1) + f^2(e_2) + f^2(e_3)$ في الاساس B

ليكن Q تطبيق خطي معرف كما يلي :

$$R^3 \to R \qquad\qquad Q(x,y,z) = x + y + z$$

1. عين $ker(Q)$ ثم عين اساس و بعد $ker(Q)$
2. عين اساس $ker(Q) + im(f)$

تمرين 7:

لدينا التطبيق الخطي $\mathcal{H}$ من $\mathbb{R}^3$المعرف كما يلي :

$$\mathcal{H}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad\qquad \mathcal{H}(x,y,z) = (-x - y - z, -x - y - z, 0)$$

1. عين$dim\big(ker(\mathcal{H})\big) et\ ker(\mathcal{H})$ هل $\mathcal{H}$ تطبيق تقابلي
2. عين $ker(\mathcal{H} + Id_E)$ ثم حل في $\mathbb{R}^3$ المعادلة $\mathcal{H}(X) = (-2X)$
3. هل $ker(\mathcal{H} + Id_E) \oplus ker(\mathcal{H})$

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة الجيلالي بونعامة
كلية العلوم الاقتصادية و علوم التسيير
السنة اولى جذع مشترك (LMD)

السنة الجامعية 2021/2020
قسم العلوم الاقتصادية . التسيير , ال
المقياس : الجبر الخطي

السلسلة رقم 3 : المحددات (Les déterminants)

تمرين 1:

لدينا المصفوفة $\mathcal{A}\ et\ \mathcal{B}$:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathscr{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. احسب $\mathcal{A}.\mathcal{B}$ و $\mathcal{A}.\mathscr{B}$
2. ماذا تلاحظ

نرمز الى جداء المصفوفة $\mathcal{A}.\mathcal{B} = \mathcal{C}$

3. احسب $\mathcal{B}.(\mathcal{A}.\mathcal{C})$ و $\mathcal{A}.(\mathcal{B}.\mathcal{C})$
4. ماذا تلاحظ

تمرين 2:

اعطي مصفوفة $\mathcal{A}_{4\times4}$ تحقق مايلي :

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i - j & si\ i \neq j \\ i + j & sinon \end{cases}$$

تمرين3:

نعتبر ما يلي :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$$

1. اوجد $x\ et\ y$ حتى يكون $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$
2. اوجد $x\ et\ y$ حتى يكون $2\mathcal{A} - 4\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$

تمرين 4:

نفرض المصفوفة $\mathcal{A}_{2\times2}$ كآتي :

$$\mathcal{A}_{2\times2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

بحيث a, b, c, d اعداد حقيقية كيفية مع $ad - bc \neq 0$

1. اوجد بدلالة a, b, c, d الاعداد الحقيقية x, y, z, t بحيث :

$$\mathcal{A} \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = Id_{R^2}$$

تمرين 5:

1. اوجد رتبة المصفوفة التالية :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

.