المصفوفات و المحددات :

1. تعريف المصفوفة
2. المصفوفة المرفقة بتطبيق خطي
3. عمليات على المصفوفات
4. المحددات
5. حساب مقلوب مصفوفة

تعريف:

المصوفة $\mathcal{A} = a_{ij}$ ذو بعد (m,n) حيث n, يمثل عدد الاسطر وm يمثل عدد الاعمدة

عناصر المصفوفة $\mathcal{A}$ يرمز لها بالرمز ij

يمكن تمثيل المصوفة عن طريق الجدول التالي :

$$\mathcal{A}_{(m,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

مثال :

$$\mathcal{A}_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B}_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ملاحضة :

المصفوفة ذات الابعاد (n,n) تسمى بالمصفوفة المربعة

العمليات على المصفوفات :

عملية الجمع:

اذا كان $\mathcal{A}=a_{ij}$ و $\mathscr{B}=b_{ij}$ المصفوفاتيين من نفس البعد اذن مجموع $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ هو نفس بعد $\mathcal{B}$ و $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}+\mathscr{B}=a_{ij}+b_{ij}=c_{ij}$$

مثال :

$$\mathcal{A}_{(2,2)}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix} \qquad \mathcal{B}_{(2,2)}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} \qquad \mathcal{A}+\mathcal{B}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

عملية الضرب :

عملية الضرب بالنسبة للمصفوفات $\mathcal{A}.\mathcal{B}$ يكون بتحقق الشرط التالي:

عدد اعمدة المصفوفة $\mathcal{A}$ يساوي عدد اسطر المصفوفة $\mathscr{B}$

اذا كانت المصفوفة $\mathcal{A}$ ذات الرتبة (m,n) و المصفوفة $\mathscr{B}$ ذات الرتبة (n,p) اذن المصفوفة $\mathcal{A}.\mathcal{B}$ هي من الرتبة (m,p)

خواص ضرب المصفوفات :

$$\mathcal{A}.(\mathcal{B}.\mathcal{C}) = (\mathcal{A}.\mathcal{B}).\mathcal{C}$$

$$\mathcal{A}.(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = (\mathcal{A}.\mathcal{B}) + (\mathcal{A}.\mathcal{C})$$

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B}).(\mathcal{C}) = (\mathcal{A}.\mathcal{C}) + (\mathcal{B}.\mathcal{C})$$

ملاحضة:

بالصفة عامة ضرب المصفوفات ليس تبديلي معناه:

$$\mathcal{A}.\mathcal{B} \neq \mathcal{B}.\mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}.\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B}.\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ضرب مصفوفتان غير صفريتيين يمكن ان نحصل على مصفوفة صفرية

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

انواع المصفوفات :

المصفوفة الصفرية: هي التي جميع عناصرها معدومة اي $a_{ij} = 0 \quad \forall\, i\, j$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

المصفوفة المربعة هيا التي يكون فيها عدد الاسطر يساوي عدد الاعمدة اي $(m = n)$ و

تسمى العناصر $a_{11};\ a_{22};\ldots\ldots a_{ii}$ بالقطر الرئيسي بالقطر الرئيسي للمصفوفة

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و تكون المصفوفة المربعة اما:

مصفوفة مثلثية علوية : اذا كانت جميع العناصر التي تحت القطر الرئيسي معدومة

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مصفوفة مثلثية صفلية : اذا كانت جميع العناصر التي فوق القطر الرئيسي معدومة

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

مصفوفة قطرية :اذا كانت جميع عناصرها معدومة ما عاد القطر الرئيسي

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

اذا كان القطر النيسي ياخذ القيمة واحد و باقي عناصر المصفوفة ذو قيمة تساوي صفر اذا

المصفوفة تسمى بالمصفوفة الوحد ة و يرمز لها بالرمز I_n

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \dots \dots$$

اثر المصفوفات:

اذا كانت المصفوفة $\mathcal{A} = \mathrm{a_{ij}}$ من الرتبة $(m'n)$ اثر المصفوفة $\mathcal{A}$ يرمز له ب $\mathcal{A}^t$ و

رتبة المصفوفة $\mathcal{A}^t$ هيا (nm)

اي اننا نقوم باستبدال الاعمدة بالاسطر

$$\mathcal{A}^t = (a_{ij}) \quad b_{ij} = a_{ij}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{A}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

خواص:

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^t = \mathcal{A}^t + \mathcal{B}^t$$

$$(\mathcal{A}.\mathcal{B})^t = \mathcal{A}^t.\mathcal{B}^t$$

المصفوفة المرافقة لتطبيق خطي :