التطبيقات الخطية

1. تعريف التطبيق الخطي
2. نواة و صورة التطبيق الخطي
3. تباين و تغامر التطبيق الخطي

تعريف التطبيق الخطي :

لُكن F و E فضائيين شعاعين على $\mathbb{R}$, نقول أن التطبيق f معرف من E نحو F إذا تحقق الشرطيين التاليين :

1. $\forall x, y \in E \times E, f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $\forall x, \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$

كما يمكن دمج الشرطين 1,2 في شرط واحد كما يلي :

1. $\forall x, y \in E \times E, \forall \lambda , \mu \ \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} , f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$

ملاحظة :

اذا كان $f(0_E) \neq 0_F$ نقول ان التطبيق غير خطي

تطبيق :

بين هل التطبيقات التالية خطية ام لا

1. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (2x - y, x + z)$

2. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (2x - y + 1, x + z - 1)$

الحل

1. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (2x - y, x + z)$

نتحقق من الشرط الاول :

1. $\forall x, y \in E \times E, f(x + y) = f(x) + f(y)$

$$\forall x \in E \Rightarrow \ (x, y, z), \ \ \forall y \in E \ \Rightarrow (x', y', z')$$

$$f(x + y) = f(x + x', y + y', z + z')$$

$$= \big(2(x + x') - (y + y'), (x + x') + (z + z')\big)$$

$$= (2x - y, x + z) + (2x' + y', x' + \ z')$$

$$= f(x) + f(y)$$

التحقق من الشرط الثاني :

2. $\forall x, \in E, \ \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$

$$\forall x \in E \Rightarrow \ (x, y, z), \lambda x = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

$$f(\lambda x) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (2\lambda x - \lambda y, \lambda x + \lambda z)$$

$$= \lambda(2x - y, x + z) = \lambda f(x)$$

التطبيق2:

$$\not{f}(0,0,0) = (1,-1)$$

نلاحض ان $(0,0,0) \neq (1,-1) \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \neq 0_{\mathbb{R}^2}$

معاه صورة الصفر لا تساوي الصفر

تطبيق 3:

$$f: R_3[\![X]\!] \to R^3$$
$$f(P) = \big(P(-1),\ \ P(0),\ \ P(1)\big)$$

1. بين ان f تطبيق خطي
2. هل f تطبيق خطي تقابلي

الحل :

$$\forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}_3[\![X]\!] \ \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$f(\alpha p_1 + \beta p_2) = \alpha p_1 + \beta p_2$$

$f(\alpha p_1 + \beta p_2)$

$$= \big((\alpha p_1 + \beta p_2)(-1); (\alpha p_1 + \beta p_2)(0);\ (\alpha p_1 + \beta p_2)(1)\big)$$

$$= \Big(\big(\alpha p_1(-1); \alpha p_1(0);\ \alpha p_1(1)\big)$$

$$+ \big(\beta p_2(-1);\ \beta p_2(0);\ \beta p_2(1)\big)$$

$$= \alpha\big(p_1(-1); p_1(0);\ p_1(1)\big) + \beta\big(p_2(-1); p_2(0);\ p_2(1)\big)\Big)$$

النتيجة :

f تطبيق خطي

f تطبيق خطي تقابلي معناه f متباين + غامر

هل f متباين ؟

f متباين $\Leftarrow$ $ker(f) = \{0_E\}$

تعيين $ker(f)$:

$$p \in \mathbb{R}_3[\![X]\!] \Rightarrow a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$\{ker(f) = 0 \Rightarrow p(-1) = 0; p(0) = 0; p(1) = 0$$

$$\begin{cases} a-b+c-d=0\ (1) \\ a=0 \\ a+b+c+d=0\ (2) \\ (1)+(2)=c=0 \\ -b=d \end{cases}$$

$$p \in \mathbb{R}_3[\![X]\!] \Rightarrow bx-bx^3=b(x-x^3)$$

$$ker(f)=vect\langle (x-x^3)\neq 0\rangle$$

$$dimker(f)=1$$

f ليس تطبيق متباين

هل f غامر؟

$$im(f)=R^3$$

من نظرية البعد لدينا

$$dimker(f)+dimim(f)=dimR^3$$

$$dimim(f)=3-1=2$$

f ليس تطبيق غامر

نواة تطبيق خطي, التطبيق الخطي المتباين :

تعريف :

ليكن f تطبيق خطي معرف من E نحو F نعرف نواة f و نرمز لها بالرمز $ker(f)$

مجموعة العناصر من f التي صورها معدومة :

$$ker(f) = \{x \in E \ / \ f(x) = 0_F\}$$

ملاحظة 1:

اذا كان f تطبيق خطي معرف من E نحو F اذن $ker(f)$ هيا فضاء شعاعي جزئي من E

ملاحظة 2:

نقول عن f تطبيق خطي معرف من E نحو F انه متباين اذا و فقط اذا كان :

$$ker(f) = \{0_E\}$$

مثال:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y, z) = \{(x + y - z), x - z\}$$

1. عين اساس $ker(f)$
2. هل f متباين

$$ker(f) = \{x \in E \ / \ f(x) = 0_F\}$$

$$\begin{Bmatrix} (x + y - z) = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x - z = 0 \Rightarrow x = z \end{Bmatrix}$$

$$ker(f) = \left\{ x = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R} \right.$$

$$ker(f) = vect \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$dim\ ker(f) = 1$$

اذن الشعاع $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $vect$ يشكل اساس ل $ker(f)$

لدينا $ker(f) = vect\langle(1,0,1)\rangle \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

مثال :

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y, z) = \{2x + y + z, y - z, x - y\}$$

1. عين اساس $ker(f)$
2. هل f متباين

$$ker(f) = \{x \in E \ / \ f(x) = 0_F\}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = y = z = 0 \\ y - z = 0 \Rightarrow y = z \\ x - y = 0 \Rightarrow x = y \end{cases}$$

$$ker(f) = vect\langle(0,0,0)\rangle$$

اذن الشعاع $vect\langle(0,0,0)\rangle$ يساوي الشعاع المعدوم فهو لا يشكل اساس ل $ker(f)$

لدينا $ker(f) = vect\langle(0,0,0)\rangle = 0_{\mathbb{R}^3}$ اذن (f) تطبيق متباين .

صورة تطبيق خطي التطبيق الخطي الغامر:

تعريف :

ليكن f تطبيق خطي معرف من E نحو F نعرف صورة f و نرمز لها بالرمز $im(f)$ مجموعة صور كل الاشعة x في E :

$$im(f) = \{f(x) \ / \ x \in E \ \} = \{\forall \, y \in F, \exists x \in E \ y = f(x)$$

ملاحظة:

نقول عن التطبيق انه غامر اذا وفقط اذا كان :

$$im(f) = F$$

نضرية:

ليكن $\left(e_1, e_2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . e_p\right)$ قاعدة معيارية كيفية من الفضاء E صورة $im(f)$**:**

$$im(f) = \langle f(e_1), f(e_2) \ldots \ldots \ldots . . f\left(e_p\right)\rangle$$

مثال :

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y, z) = \{x - y, y + z, x + z\}$$

1. عين صورة و اساس $im(f)$
2. هل f غامر

الحل :

$$im(f) = \{f(x) \ / x \in E \}$$

$$im(f) = vect\langle f(e_1), f(e_2) \dots \dots \dots . . f(e_p)\rangle$$

$$im(f) = vect\,\langle \mathcal{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{V}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle$$

نلاحض ان $\mathcal{V}_2$ و $\mathcal{V}_1$ مرتبطين خطيا :

اذن اساس f هو :

$$\mathscr{B} \sim vect\,\langle \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{V}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle$$

بما ان $\mathcal{V}_3$ و $\mathcal{V}_2$ مستقلان خطيا فهما يشكلان اساس

$$dim\big(im(f)\big) = 2$$

لدينا : $im(f) = 2 \neq 3$

اذن f ليس غامر

مثال :

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y, z) = \{-2x + y + z, x - 2y + z\}$$

1. بين ان f تطبيق خطي

2. عين اساس $ker(f)$ و استنتج بعده

3. عين اساس صورة f

الحل :

$$ker(f) = \{x \in E \ / \ f(x) = 0_F\}$$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 & \Rightarrow x = z \\ x - 2y + z = 0 \Rightarrow -3x + 3y = 0 \Rightarrow x = y \\ ker(f) = \{(x, y, z), x(\quad)\} \end{cases}$$

$$ker(f) = vect\langle(0, 0, 0)\rangle$$

ملاحضة :

كيف نميز بين التطبيق الخطي الغامر و المتباين؟

لكن E و F فضائين شعاعيين منتهي البعد لنفرض ان $dim(E) = n$; $dim(F) = m$

ليكن تطبيق f خطي معرف من E نحو

1. f متباين $\Leftrightarrow rang(f) = \mathrm{n}$
2. f غامر $\Leftrightarrow rang(f) = m$
3. f تقابلي $\Leftrightarrow$ f غامر $\Leftrightarrow$ f متباين

تركيب تطبيقين خطيين:

ليكن $E, F, et\ G$ فضاءات شعاعية التطبيق الخطي $g \circ f$ معرف كما يلي :

$$E \overset{f}{\rightarrow} F \overset{g}{\rightarrow} G$$

$$g \circ f$$

$$g \circ f: E \rightarrow G$$

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$$

مثال :

ليكن g و f تطبيقين خطيين معرفين كما يلي :

$$f: E \rightarrow F \qquad\qquad g: F \rightarrow G$$

1. بين ان $g \circ f: E \rightarrow G$ تطبيق خطي ؟

مثال:

ليكن $G: R^2 \rightarrow R^2$ $F: R^3 \rightarrow R^2$ تطبيقات خطية معرفة كما يلي :

$$F(x, y, z) = (2x, y + z)$$

$$G(x,y) = (\,y,x)$$

1. عين $G \circ F$ و $F \circ G$

الحل :

$$(G \circ F)(x,y,z) = G\big(F(x,y,z)\big) = G(2x, y+z) = (y+z, 2x)$$

التطبيق $F \circ G$ غير ممكن لان

رتبة جملة اشعة و رتبة تطبيق خطي :

لتكن مجموعة الاشعة $\mathcal{S} = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots \dots .. \mathcal{V}_p\}$ جملة من الفضاء الشعاعي E

نسمي رتبة الجملة $\mathcal{S}$ بعد الفضاء الشعاعي الجزئي المولد ب$\mathcal{S}$ اي :

$$rang(\mathcal{S}) = dim\big(vect(\mathcal{S})\big)$$

ايزومورفيزم الفضائات الشعاعية :