تمهيد:

الفصل الاول : الفضاءات الشعاعية (les Espaces Vectoriels)

1. تعريف الفضاء الشعاعي
2. التركيبات الخطية للاشعة
3. الاستقلال و الارتباط الخطي
4. لالساس و البعد

الهدف من هذا الدرس هو البرهان على ان مجموعة ما تشكل فضاء شعاعي جزئي (S.E.V) كيف نميز بين الفضاء الشعاعي الجزئي و الفضاء الشعاعي .

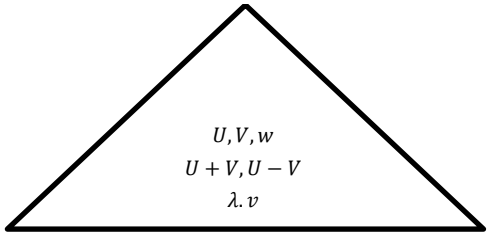
في هذا الفصل نرمز الى الجسم التبديلي بالرمز $\mathbb{K} = \mathbb{C}\ ou\ \mathbb{R}$

جسم تبديلي : هو شكل جبري من خالله يمكننا القيام بعملية الجمع $(+)$, الطرح $(-)$,و كذلك الضرب $(\cdot)$

بحيث $\langle \mathbb{K} = \mathbb{R}$: (الحقيقية الاعداد) , $\mathbb{C}$: (المركبة الاعداد) $\rangle$

1. تعريف الفضاء الشعاعي (Espace Vectoriel)

هو مجموعة غير خالية يرمز لها با E تتكون من عناصر مجموعة العناصر التي تنتمي ل E تسمى لأشعة (les vecteurs)

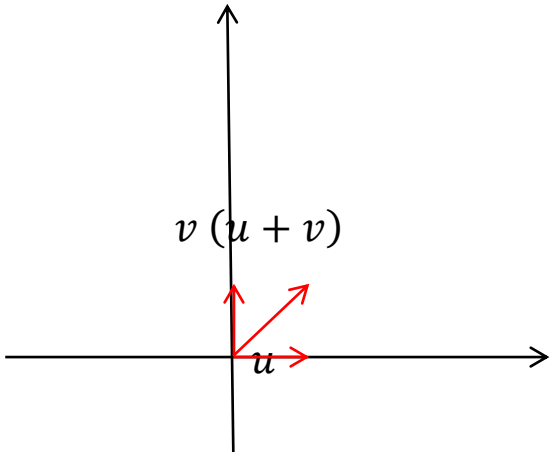


$\lambda: c'estscalaire\ qui\ appartient$ à $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}: \langle \mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \ldots\ldots \rangle$

ملاحضة :لايمكن ضرب او قسمة شعاعين ذو ابعاد مختلفة

التمثيل الهندسي للفضاء الشعاعي :



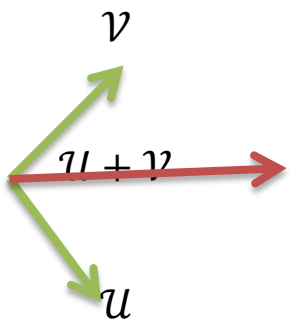
كيف نبرهن ان مجموعة ما تشكل فضاء شعاعي :

لدينا $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ مجموعة غير خالية مزودة بالقانون الداخلي يرمز له $(+)$ معناه

التطبيق :

$$E \times E \to E$$

$$\mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathcal{U} + \mathcal{V}$$



$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y\, z)\ ;\ (x', y', z');\ \ x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}\}$$

$$(x, y\, z) + \ (x', y', z') = (x + x'; y + y'; z + z')$$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1; x_2 \dots \dots \dots \dots . x_n)\ ;\ (y_1; y_2 \dots \dots \dots . y_n);\ \ x_i;\ y_i \in \mathbb{R}\}$$

$$(x_1;\ x_2; \dots \dots . x_n) + (y_1; y_2 \dots \dots \dots y_n) = (x_1 + y_1; \dots x_n + y_n)$$

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1; z_2 \dots \dots \dots \dots . z_n)\ ;\ (z_1'; z_2' \dots \dots \dots . z_n');\ \ z_i;\ z_i' \in \mathbb{C}\}$$

$$(z_1; z_2 \dots \dots \dots \dots . z_n)\ + (z_1'; z_2' \dots \dots \dots . z_n') = (z_1 + z_1'; \dots z_n + z_n')$$

$$\mathbb{R}_n[\![X]\!] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \dots . . a_n x^n\}$$

$$\mathcal{P}; \mathcal{Q} \in\ \mathbb{R}_n[\![X]\!]\ \ \mathcal{P} + \mathcal{Q} \in \mathbb{R}_n[\![X]\!]$$

$$\mathscr{F}(X;\ \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$$

$$f + g \in \mathcal{F}$$

$$\mathcal{S}_n = \{(\mathbb{U}_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad ; \mathbb{U}_i \in \mathbb{R}\}$$

$$(\mathbb{V}_n)_{n\in\mathbb{N}} + (\mathbb{U}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\mathbb{U}_n + \mathbb{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

و قانون خارجي يرمز له بالرمز $(\cdot)$ معناه التطبيق :

$$\mathbb{R} \times E \to E$$

$$\mu \times \mathcal{U} \to \mu\mathcal{U}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y\ z)\ ;\ \ x, y, z \in \mathbb{R}\ \}$$

$$\mu(x, y, z) = (\mu.x, \mu y, \mu.z)$$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1; x_2 \dots\dots\dots\dots.x_n)\ ;\ \ x_i; \mu \in \mathbb{R}\ \}$$

$$\mu(x_1;\ x_2; \dots\dots.x_n) = (\mu x_1;\ \mu x_2; \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.\mu x_n)$$

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1; z_2 \dots\dots\dots\dots.z_n)\ ;\ \ z_i;\ \mu \in \mathbb{C}\ \}$$

$$\mu(z_1; z_2 \dots\dots\dots\dots.z_n)\ = (\mu z_1;\ \mu z_2; \dots\dots\dots\dots\dots\dots..\mu z_n)$$

$$\mathbb{R}_n[\![X]\!] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\dots..a_n x^n\}$$

$$\mathcal{P} \in \ \mathbb{R}_n[\![X]\!];\ \mu \in \mathbb{R}\ \ \mu\mathcal{P} \in \mathbb{R}_n[\![X]\!]$$

$$\mathscr{F}(X;\ \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$$

$$\mu f \in \mathcal{F}$$

$$\mathcal{S}_n = \{(\mathbb{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \ ;\ \mathbb{U}_i;\ \mu \in \mathbb{R}\}$$

$$\mu(\mathbb{U}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\mu\mathbb{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

ليكن E مجموعة , $E \neq \emptyset$ نقول ان E هو $\mathbb{K}$ - فضاء شعاعي اذا كان لدينا :

$$(+)E \times E \to E$$

$$(\mathcal{U}.;\ \mathcal{V}) \to \mathcal{U} + \mathcal{V}$$

$$(.)\ \mathbb{K} \times E \to E$$

$$(\lambda;\ E) \to \lambda\mathcal{U}$$

نقول ان E فضاء شعاعي على $\mathbb{K}$ اذا وفقط اذا تحققت الشروط التالية :

القانون الداخلي $(+)$:

1. الخاصية التبديلية : $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \mathcal{V} + \mathcal{U},\ \ (\mathcal{U}, \mathcal{V}) \in E$

2. الخاصية التجميعية :

$$(\mathcal{U} + \mathcal{V}) + \mathcal{W} = \mathcal{U} + (\mathcal{V} + \mathcal{W}) \qquad (\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}) \in E$$

3. العنصر الحيادي بانسبة للجمع : $\mathcal{U} + 0_E = \mathcal{U}\,, \quad \mathcal{U} \in E$

4. $\mathcal{U} + (-\mathcal{U}) = 0_E \quad \mathcal{U} \in E$

القانون الخارجي $(.)$:

5. $\lambda(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \lambda\mathcal{U} + \lambda\mathcal{V}, \ \lambda \in \mathbb{K}, (\mathcal{U}, \mathcal{V}) \in E$

6. $(\lambda + \rho)\mathcal{U} = \lambda\mathcal{U} + \rho\mathcal{U}, \quad (\lambda, \rho) \in \mathbb{K}, \mathcal{U} \in E$

7. $\lambda(\rho\mathcal{U}) = (\lambda\rho)\mathcal{U}, \ (\lambda, \rho) \in \mathbb{K}, \mathcal{U} \in E$

8. $1.\mathcal{U} = \mathcal{U}$

ملاحضة:

- نسمي مجموعة العناصر التي تنتمي الي E $\big((\mathcal{U}) \in E\big)$ بالاشعة
- نسمي الاعداد الحقيقية او المركبة $\lambda \in \mathbb{K}$ بالسلاميات

مجموعة الفضاءات الشعاعية :

1. $(\mathbb{R}^2, +, .)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}^2$
2. $(\mathbb{R}^3, +, .)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}^3$
3. .
4. ..
5. ..
6. $(\mathbb{R}^n, +, .)$ فضاء شعاعي على $\mathbb{R}^n$

ملاحضة : للاجابة على السؤال هل المجموعة E تشكل فضاء شعاعي يكفي ان ناخذ مجموعة جزئية من E نبرهن ان فضاء شعاعي جزئي اذن يكفي ان نبرهن فقط على 3 خواص تالية :

2. الفضاء الشعاعي الجزئي :

لتكن $\mathcal{F}$ مجموعة جزئية من الفضاء الشعاعي E نقول ان F فضاء شعاعي جزئي اذا وفقط اذا تحققت الشروط التالية :

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset \quad (0_E \in \mathcal{F})$
2. $\forall (\mathcal{U}, \mathcal{V}) \in \mathscr{F},\ (\mathcal{U} + \mathcal{V}) \in \mathscr{F}$
3. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R} (\mathcal{U}) \in \mathscr{F},\ (\lambda \mathcal{U}) \in \mathscr{F}$

مثال :

المجموعة الجزئية من $\mathscr{F}$ من $\mathbb{R}^3$ المعرفة ب $\mathscr{F}$ $\quad \mathcal{F}: \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3\}$

ليست فضاء شعاعي جزئي لان $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \notin \mathcal{F}$

ملاحضة : كل فضاء شعاعي جزئي هو فضاء شعاعي اذن لاتبات ان مجموعة ما هيا فضاء شعاعي يكفي اثبات انها فضاء شعاعي جزئي ل فضاء شعاعي معروف

مثال :

ليكن $\mathscr{F}$ جزء من $\mathbb{R}^2$ معرف كما يلي : $\mathcal{F}: (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x + y = 0)$

اثبت ان $\mathscr{F}$ فضاء شعاعي جزئي

1. $(0) + (0) = 0 \ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} \neq \emptyset$

2. $\mathcal{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathcal{F} \ \ \mathcal{V}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \in \mathcal{F} \Rightarrow (\mathcal{U} + \mathcal{V}) \in \mathcal{F}$

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = (x + x') + (y + y') = x + y + x' + y' = 0$$

3. $\forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}, \mathcal{U} \in \mathcal{F} \Rightarrow \lambda\mathcal{U} \in \mathcal{F}$

$$\mathcal{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \lambda\mathcal{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda x + \lambda y = \lambda(x + y) = 0$$

اذن فضاء$\mathscr{F}$ شعاعي جزئي

مثال 2 :

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x - y - z = 0\}$$

بين هل $\mathcal{A}$ فضاء شعاعي جزئي

مثال:

$$\mathcal{K} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad x^2 - z^2 = 0\right\}$$

1. هل $\mathcal{K}$ فضاء شعاعي جزئي ؟

الحل:

لكي نبرهن ان $\mathcal{K}$ ليس فضاء شعاعي جزئي يكفي ان نجد مثال مضاد لاي حقق شرط من الشروط الثلاثة المذكورة اعلاه اذن:

ناخذ شعاعيين $\mathcal{V}_1$ و $\mathcal{V}_2$ينتميان الى الفضاء $\mathcal{K}$ بحيث $x^2 - z^2 = 0$

$$\mathcal{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

نلاحض ان جمع الشعاعين $\mathcal{V}_1$ و $\mathcal{V}_2$ لا ينتميان الى الفضاء $\mathcal{K}$

وعليه $\mathcal{K}$ ليس فضاء شعاعي جزئي

مثال :

لدينا المجموعة التالية :

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \qquad f(1) = 0\}$$

هل $\mathcal{F}$ فضاء شعاعي جزئي ؟

الحل:

الدالة المعدومة :

.1

$$\begin{cases} x \to 0 \\ 1 \to 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \in \mathcal{F}$$

$f, g \in \mathcal{F}$ .2

$$f(1) = 0; \quad g(1) = 0$$

$$f + g = 0 = f(1) + g(1) = 0$$

$\alpha \in \mathbb{R} \quad f \in \mathcal{F}$ .3

$$f(\alpha . 1) = \alpha f(1) = 0$$

النتيجة :

$\mathcal{F}$ فضاء شعاعي جزئي

Inclusion avec les EV :

E هو $\mathbb{K}$ – فضاء شعاعي $(\mathbb{K} = \mathbb{R}/\mathbb{C})$

$\mathcal{U}_1; \mathcal{U}_2; \ldots\ldots \mathcal{U}_p \in E$

اذن :

$vect\langle \mathcal{U}_1; \mathcal{U}_2; \ldots\ldots \mathcal{U}_p \rangle$ هو فضاء شعاعي جزئي من E

و منه: $vect\langle \mathcal{U}_1; \mathcal{U}_2; \ldots\ldots \mathcal{U}_p \rangle \subset E$

مبرهنة :

- اذا كان E هو $\mathbb{K}$ – فضاء شعاعي $(\mathbb{K} = \mathbb{R}/\mathbb{C})$
- اذا كان $\mathcal{U}_1; \mathcal{U}_2; \dots\dots \mathcal{U}_p \in E$

اذن:

$$vect\langle \mathcal{U}_1; \mathcal{U}_2; \dots\dots \mathcal{U}_p \rangle \subset E$$

مثال :

لدينا $\mathscr{F} = \{\mathcal{P} \in \mathbb{R}[\![X]\!] \ ; \mathcal{P}(1) = 0\}$

1. بين ان : $vect\langle (x-1); (x^2+x-2) \rangle \subset \mathcal{F}$

الحل:

1. نبرهن ان $\mathcal{F}$ هو فضاء شعاعي من خلال ما سبق لكي نبرهن ان $\mathcal{F}$ هو فضاء شعاعي يكفي ان نبرهن على انه فضاء شعاعي جزئي.
2. نبرهن ان كل من (x^2-x-2) و $(x-1)$ تنتمي اى $\mathcal{F}$

$$(x-1)(1) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \in \mathcal{F}$$

$$\boldsymbol{(x^2+x-2)(1) = 0 \Leftrightarrow (x^2+x-2) \in \mathcal{F}}$$

اذن :

$$\boldsymbol{vect\langle (x-1);\ (x^2+x-2)\rangle \subset \mathcal{F}}$$

مثال:

في الفضاء $\mathbb{R}^3$ بين ان :

$$1.\ vect\left\langle \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}\right\rangle \subset vect\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

الحل:

$$1.\ vect\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle \text{ فضاء شعاعي جزئي من } \mathbb{R}^3$$

$$2.\ vect\left\langle \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}\right\rangle \subset vect\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \in vect\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle \Rightarrow$$

معناه:

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\ \ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} 3 = \alpha+\beta+\gamma \Leftrightarrow \gamma = 1 \\ 2 = \alpha+\beta \quad\ \Leftrightarrow \beta = 1 \\ 1 = \alpha \end{cases}$$

اذن :

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \in vect\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} \in vect\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle \Rightarrow$$

معناه:

$$\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\ \ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases}3 = \alpha + \beta + \gamma \Leftrightarrow \gamma = 0\\ 3 = \alpha + \beta \quad\ \Leftrightarrow \beta = 1\\ 2 = \alpha\end{cases}$$

ومنه :

$$vect\left\langle \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}\right\rangle \subset vect\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

الفضاء الشعاعي *vect* :

ليكن E فضاء شعاعي, - $\mathbb{K}$

$\mathcal{V}_1;\ \mathcal{V}_2; \ldots\ldots\ldots \mathcal{V}_p \in E$

$$vect\langle \mathcal{V}_1;\ \mathcal{V}_2; \dots\dots\dots \mathcal{V}_p\rangle = \{\lambda_1\mathcal{V}_1 +\ \lambda_2\mathcal{V}_2; \dots\dots\dots +\lambda_p\mathcal{V}_p\ ;\ \lambda_i \in \mathbb{K}\}$$

مجموع فضائيين شعاعيين جزئيين:

ليكن $\mathcal{F}_1$ و $\mathcal{F}_2$ فضائئن شعاعيين جزئيين من E مجموع $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ معرف كما يلي :

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 = \{x \in E\ ; x = x_1 + x_2\ ;\ x_1 \in \mathcal{F}_1;\ x_2 \in \mathcal{F}_2}$$

اذن $\boldsymbol{\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2}$ هو فضاء شعاعي جزئي

3. التركيبات الخطية (Les Combinaisons Linéaires)

تركيب خطي ل $\mathcal{P}$ شعاع :

تعريف :

ليكن $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots\dots\dots \mathcal{V}_p)$ مجموعة اشعة من الفضاء E نسمي الشعاع $\mathcal{U}$ من E تركيب خطي لاشعة $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots\dots\dots \mathcal{V}_p)$ اذا وفقط اذا وجدت السلميات $(\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots\dots \lambda_p)/(\lambda_i \in \mathbb{R})$ بحيث :

$$\mathcal{U} = \lambda_1\mathcal{V}_1 + \lambda_2\mathcal{V}_2 + \cdots\dots\dots\dots \lambda_p\mathcal{V}_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\mathcal{V}_p$$

مثال :

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{W} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

هل الشعاع $\mathcal{W}$ هو تركيب خطي للاشعة $\mathcal{V}$و $\mathcal{U}$

$$\mathcal{W} = \lambda_1 \mathcal{U} + \lambda_2 \mathcal{V}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{S} = \begin{cases} 5 = \lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = 4 & (1) \\ 2 = 2\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = 1 & (2) \\ 1 = -\lambda_1 + 2\lambda_2 \Rightarrow 1 \neq 7 & (3) \end{cases}$$

نقول ان$\mathcal{W}$ تركيب خطي لكل من $\mathcal{V}$و $\mathcal{U}$ بشرط ان يكون ل $\mathcal{S}$ حلول في $\mathbb{R}$

نلاحض من خلال المعادلة (3) ان $\mathcal{S}$ لا يقبل حلول لتاكد :

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

مثال2:

هل $\mathcal{W} = (1, -1)$ هو تركيب خطي للاشعة:

$$[\mathcal{V}_1 = (2, 1), \mathcal{V}_2 = (1, 1), \mathcal{V}_3 = (-2, 1)]$$

$$\mathcal{W} = \lambda_1\mathcal{V}_1 + \lambda_2\mathcal{V}_2 + \lambda_3\mathcal{V}_3$$

$$\varpi = \begin{cases} 1 = 2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \\ -1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}$$

مثال 3 :

في $\mathbb{R}[X]$ هل كثير الحدود X^2 هو تركيب خطي لكثيرات الحدود التالية :

$$\{\mathcal{P}_1 = ((X-1)^2), \quad \mathcal{P}_2 = (X-1), \quad \mathcal{P}_3 = (1)\}$$

$$X^2 = \lambda_1\mathcal{P}_1 + \lambda_2\mathcal{P}_2 + \lambda_3\mathcal{P}_3$$

$$X^2 = \lambda_1 X^2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 X + \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3$$

$$\omega \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

فضاء شعاعي جزئي مولد ب p شعاع :

تعريف :

ليكن $p \in \mathbb{N}^*/ \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots\dots\dots\dots \mathcal{V}_p\}$ مجموعة من الاشعة من E $\mathscr{F}$ مجموعة جزئية من E المكونة من كل التركيبات الخطية لالشعة $p \in \mathbb{N}^*/ \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots\dots\dots\dots \mathcal{V}_p\}$:

$$\mathscr{F} = \{\lambda_1\mathcal{V}_1 + \lambda_2\mathcal{V}_2 + \cdots \dots\dots\dots\dots\dots\dots \lambda_p\mathcal{V}_p\}/\lambda_1, \lambda_2, .. \lambda_p \in \mathbb{R}$$

المجموعة $\mathscr{F}$ هيا فضاء شعاعي جزئي من E يسمى الفضاء الشعاعي الجزئي المولد ب $p \in \mathbb{N}^*/ \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots\dots\dots\dots \mathcal{V}_p\}$ و يرمز له

$$\mathscr{F} = Vect\langle \mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots\dots\dots\dots \mathcal{V}_p / \ p \in \mathbb{N}^* \rangle$$

بحيث :كل شعاع من E يشكل تركيب خطي للاشعة $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots\dots\dots\dots \mathcal{V}_p\}$

معناه:

$$\forall \mathbb{v} \in \boldsymbol{E};\ \ \forall\ \boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2}, \dots\dots\dots\dots \boldsymbol{\lambda_p} \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{V} = \boldsymbol{\lambda_1\mathcal{V}_1 + \lambda_2\mathcal{V}_2} + \cdots \dots\dots\dots + \boldsymbol{\lambda_p\mathcal{V}_p}$$

مثال :

لدينا

$$\mathscr{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y - 3z = 0\}$$

بين ان $\mathscr{F}$ فضاء شعاعي جزئي مولد

$$\mathscr{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2y + 3z\}$$

$$\mathscr{F} = \{(2y + z, y, z)\ (y, \quad z) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{y(2,1,0) + z(3,0,1) / y, z \in \mathbb{R}\}$$

نلاحض ان $\mathscr{F}$ هو مجموعة كل التركيبات الخطية $\mathcal{U} = (2,1,0)$ $\mathcal{V}(3,0,1)$ ومنه $\mathscr{F}$ فضاء شعاعي جزئي مولد بالاشعة $\mathcal{V}$ و $\mathcal{U}$

$$\mathscr{F} = \langle (2,1,0), (3,0,1) \rangle$$

مثال:

ليدنا من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^2$ مجموعة الاشعة التالية :

$$\langle \mathcal{V}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

1. هل الاشعة $\mathcal{V}_1$ و $\mathcal{V}_2$ تولد $\mathbb{R}^2$؟

الحل:

ليكن الشعاع $\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \\ y \end{pmatrix}$

الاشعة $\mathcal{V}_1$ و $\mathcal{V}_2$ تولد $\mathbb{R}^2$ اذا كان :

$$\mathbb{V} = \alpha\mathcal{V}_1 + \beta\mathcal{V}_2$$

$$\begin{cases} x = 2\alpha + \beta \leftrightarrow \beta = x - 2\alpha \leftrightarrow \beta = -x + 2y \\ y = \alpha + \beta \qquad\qquad\qquad \leftrightarrow \quad \alpha = x - y \end{cases}$$

$$\mathbb{V} = (x - y)\mathcal{V}_1 + (-x + 2y)\mathcal{V}_2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ x - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x + 2y \\ -x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

اذن الاشعة $\mathcal{V}_1$ و $\mathcal{V}_2$ تولد $\mathbb{R}^2$

مثال:

ليدنا من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ مجموعة الاشعة التالية :

$$\langle \mathcal{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ و } \mathbb{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

هل الاشعة $\mathcal{V}_1$ و $\mathcal{V}_2$ تولد $\mathbb{V}$؟

الحل:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 \ (1) \\ 1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 0 = \lambda_1 + 3\lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3\lambda_2 \ (3) \end{cases}$$

من المعادلة (1) و (2) نلاحض ان هناك تناقض اذن:

الاشعة $\mathcal{V}_1$ و $\mathcal{V}_2$ لا تولد $\mathbb{V}$

لاسس و الابعاد :

تعريف :

نقول عن جملة اشعة $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots\ldots\ldots\ldots \mathcal{V}_p}\}$ مجموعة غير خالية من الفضاء الشعاعي E انها اساس ل فضاء الشعاعي E اذا وفقط اذا كانت $\mathcal{S}$:

- مستقلة
- و مولدة

$$\mathcal{S} \text{ اساس} \Leftarrow \begin{cases} \mathcal{S} \text{ خطيا مستقلا} \\ \wedge \\ \mathcal{S} \text{مولدة} \end{cases}$$

ملاحظة :

كي نبرهن ان جملة اشعة $\mathcal{S} = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots\ldots\ldots\ldots \mathcal{V}_p\}$ تشكل اساس ل $\mathbb{R}^p$

يكفي ان نبرهن انها جملة مستقلة او مولدة

او نبرهن ان $det(S) \neq 0$

كل فضاء شعاعي يملك اساس

امثلة :

ان الجملة $S = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots \dots \dots \dots . \boldsymbol{e_n}\}$ حيث

$e_1 = (1,0,0,0,,,,0), e_2 = (0,1,0 \dots \dots .0) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots . e_n =$

$(0,0,0,0 \dots . .1)$

تسمى بالاساس القانوني ل R^n

الجملة $\{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\}$ اساس ل $\mathbb{R}^2$

الاستقلال الخطي :

جملة الاشعة $S = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots \dots \dots \dots . \mathcal{V}_p\}$ مستقلة خطيا اذا وفقط اذا كان :

$\forall \lambda_1, \lambda_2, . . \lambda_p \in \mathbb{R} \ / \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathcal{V}_p = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots \dots \dots \dots \dots \dots . \lambda_p = 0.$

ملاحظة :

اذا كانت جملة الاشعة $S = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots \dots \dots \dots . \mathcal{V}_p\}$ليست مستقلة خطيا $\Leftarrow$ اذا يمكننا

القول ان الجملة $S = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots \dots \dots \dots . \mathcal{V}_p\}$ مرتبطة خطيا

خواص الجمل المرتبطة:

لتكن جملة الاشعة $\mathcal{S} = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots \dots \dots \dots . \mathcal{V}_p\}$ من الفضاء الشعاعي E^p عندئذ:

1. اذا كان احد عناصر هذه الجملة هو الشعاع الصفري 0_E اذن مرتبطة $\mathcal{S}$ خطيا
2. اذا كان في الجملة $\mathcal{S}$ شعاع مكرر اكثر من مرة فان الجملة $\mathcal{S}$ مرتبطة خطيا
3. اذا كانت الجملة $\mathcal{S}$ مرتبطة حطيا فان اي شعاع من هذه الجملة يكتب عن شكل تركيب خطي مع بقية العاصر او الاشعة الاخرى ل $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{U} = \boldsymbol{\lambda_1 \mathcal{V}_1 + \lambda_2 \mathcal{V}_2} + \cdots \dots \dots \dots . \boldsymbol{\lambda_p \mathcal{V}_p} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{\lambda_i \mathcal{V}_p}$$

مثال :

بين ان $\{e_1(1,0);\ e_2(0,1)\}$ جملة مستقلة من $\mathbb{R}^2$

ليكن $\boldsymbol{e_1}$ و $\boldsymbol{e_2}$ من $\mathbb{R}$ $\boldsymbol{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}}$

$$\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = 0} \Leftarrow \begin{cases} \boldsymbol{\lambda_1 = 0} \\ \boldsymbol{\lambda_2 = 0} \end{cases}$$

مثال :

هل الاشعة $\{\mathcal{V}_1 = (1,\ 1);\ \mathcal{V}_2 = (2,\ 2)\}$ مستقلة خطيا

$\forall \lambda_1;\ \lambda_2 \in \mathbb{R};\ \ \lambda_1 \mathcal{V}_1 + \lambda_2 \mathcal{V}_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2\lambda_2 \end{cases}$$

اذن ليس بالضرورة $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ و منه الجملة تقبل عدد غير منتهي من الحلول و منه الاشعة مرتبطة خطيا

مثال :

ادرس الاستقلال او الارتباط الخطي للأشعة التالية :

$$\{(1,0,0)\ (1,1\ 1\ )\ (-1,-2,-2)\}$$

بعد فضاء شعاعي:

ليكن E فضاء شعاعي نقول ان E منتهي البعد اذا و فقط اذا وجدة فيه جملة مولدة منتهيه

اذا كان S اساس ل E نسمي $n = card(S)$ بعد الفضاء الشعاعي E و نرمز له بالرمز

$$dim(E) = n$$

نظرية البعد :

ليكن E فضاء شعاعي ذو بعد منتهي و $\mathcal{F}$ فضاء شعاعي جزئي

اذن $dim(\mathcal{F}) \leq dim(E)$

$$dim(E) = dim(F) \Leftrightarrow E = F$$

عبارة ($Grassmann$) فيما يخص الابعاد :

اذا كان F وE فضائيين شعاعيين جزئيين من نفس الفضاء الشعاعي E ذو بعد منتهي اذن :

$$dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$$

رتبة جملة اشعة :

ليكن ليكن $\mathcal{S} = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots\dots\dots\dots \mathcal{V}_p\}$ جملة من p شعاع من من فضاء شعاعي جزئي E نسمي الرتبة rg بعد الفضاء الشعاعي الجزئي المولد ل $\mathcal{S}$

$$rang(\mathcal{S}) = dim\ vect(\mathcal{S})$$

مثال :

$$\mathcal{S} = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$$

1. ماهيا رتبة الجملة $\mathcal{S}$

الحل :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \{0_E\}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$\text{rang}(\mathcal{S}) = 3$

تطبيق :

لتكن E مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ معرفة كما يلي :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + z = 0\}$$

1. بين ان E فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$
2. عين اساس و بعد E

ليكن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$ معرفة كما يلي :

$$F = \langle (1, 2, 3); \ (2, 4, 6) \rangle$$

1. عين اساس F et F+E

الحل :

.1

$$E = \left\{ \begin{array}{c} (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \ x - y + z = 0 \\ = \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \ x = y - z \\ \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; y, z \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$E = vect\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$E = vect\langle (\mathcal{V}_1; \mathcal{V}_2) \neq 0_{R^3} \rangle$$

$$dim(E) = 2$$

$$F = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle \ .2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = vect\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

$$dim(F) = 1$$

$$E + F = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle$$

$$dim(E + F) \leq dim(\mathbb{R}^3)$$

اذن لالشعة الاربعة مرتبطة خطيا ندرس استقلالية ثلاثة اشعة اختيارية

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\begin{cases}\alpha-\beta+\lambda=0\Rightarrow-2\lambda+3\lambda+\lambda=0\Rightarrow\lambda=0\\ \alpha+0+2\lambda=0\Rightarrow\ \alpha=-2\lambda\Rightarrow\alpha=0\\ 0+\beta+3\lambda=0\Rightarrow\ \beta=-3\lambda\Rightarrow\beta=0\end{cases}$$

$$\alpha=\beta=\lambda=0$$

اذن $\boldsymbol{dim(E+F)=3}$

بعض الخصائص :

1. $rang(\mathcal{S})\leq p$
2. $\mathcal{S}$ مستقلة خطيا $\Leftarrow rang(\mathcal{S})=\ p$

تقاطع فضائيين شعاعين جزئيين :

تقاطع فضائيين شعاعين جزئيين هو فضاء شعاعي جزئي لدينا $\mathcal{F}_1$ و $\mathcal{F}_2$ فضائين شعاعيين جزئيين

$\mathcal{F}_1$ تقاطع $\mathcal{F}_2$ يرمز له $\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$

مثال :

لدينا المجموعات التالية:

$$\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad x - y - z = 0\}$$

$$\mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x - y = 0\}$$

1. عين $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$

ملاحضة:

لا يمكن تقاطع فضايين شعاعيين جزئيين اذا كان ينتميان الى فضاءات شعاعية ذات ابعاد مختلفة

تطبيق :

ليكن

$\mathcal{A} = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$; $\mathcal{B} =$:

$\{(1, 0, 1, 0), (0, 2, 1, 1)\}$

نفرض ان : $E_1 = [\mathcal{A}]$; $E_2 = [\mathcal{B}]$

عين $dim(E_1)$; $et\ dim(E_2)$

عين اساس $E_1 \cap E_2$

هل $\mathbb{R}^4 = E_1 \oplus E_2$

الحل :

$dimE_1 = 3$; $dimE_2 = 2$ لان لان الاشعة المشكلة ل $\mathcal{B}$و $\mathcal{A}$ مستقلة خطيا

$$X \in E_1 \cap E_2 \Leftrightarrow X \in E_1 \wedge X \in E_2 \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \lambda, \gamma, \theta \in \mathbb{R}$$

$$X = (\alpha, \alpha + \beta, \beta + \lambda, \lambda) \wedge X = (\gamma, 2\gamma, \gamma + \theta, \theta)$$

Donc

$$(\alpha, \alpha + \beta, \beta + \lambda, \lambda) = (\gamma, 2\gamma, \gamma + \theta, \theta) \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \lambda = \theta$$

Alors

$$X = \alpha(1, 2, 2\ 1)\ \alpha \in \mathbb{R}, E_1 \cap E_2 = \mathcal{V} = (1, 2, 2, 1) \neq (0, 0, 0,0)$$

ومنه $\mathcal{V}$ يشكل اساس ل $E_1 \cap E_2$

$$\mathbb{R}^4 \neq E_1 \oplus E_2$$

لان $E_1 \cap E_2 \neq (0\ 0\ 0\ 0)$

كما ان

مثال :

ليكن Eفضاء شعاعي $\mathcal{F}$و $\mathcal{G}$ فضائين شعاعيين جزئيين

بين ان $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ فضاء شعاعي جزئي

الحل :

$$\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$$

$$\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{F}, \mathcal{U} + \mathcal{V} \in \mathcal{F}, car\ \mathcal{F}\ est\ un\ S.E.V$$

$$\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{G}, \mathcal{U} + \mathcal{V} \in \mathcal{G}, car\ \mathcal{G}\ est\ un\ S.E.V$$

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$$

$$\mathcal{V} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}\ \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{V} \in \mathcal{F}, \lambda\mathcal{V} \in \mathcal{F}, car\ \mathcal{F}\ est\ un\ S.E.V$$

$$\mathcal{V} \in \mathcal{G}, \lambda\mathcal{V} \in \mathcal{G}, car\ \mathcal{G}\ est\ un\ S.E.V$$

$$\lambda\mathcal{V} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$$

الجمع المباشر لفضائيين شعاعيين جزئيين :

لُكن E فضاء شعاعي على $\mathbb{R}^p$ و$\mathscr{F}$,$\mathcal{G}$ ف ش ج من E

نقول ان فضائيين شعاعين جزئين $\mathscr{F}$و $\mathcal{G}$ يشكلان مجموع مباشر اذا توفر الشروط التالية :

1. $\mathscr{F} \cap \mathcal{G} = \{0_E\}$ و يرمز له $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$

الفضاء الشعاعي الجزئي الاضافي :

نقول عن فضائيين شعاعيين جزئيين $\mathcal{F}$و $\mathcal{G}$ من ف ش E اضفيان في E اذا كان

$$E = \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$$

اي

$$\begin{cases} E = \mathcal{F} + \mathcal{G} \\ \mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{0_E\} \end{cases}$$

و منه

$$dimE = dim\mathcal{F} + dim\mathcal{G}$$

مثال:

ليكن $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ فضائيين شعاعيين جزئيين معرفين كما يلي

$$\mathcal{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - z = 0\}$$

$$\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = z = 0\}$$

هل $\mathbb{R}^3 = \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$

هل $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$

الحل:

لنبيين ان $\mathcal{G}$ و $\mathcal{F}$ اضافيين في $\mathbb{R}^3$ اي $\mathbb{R}^3 = \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$

$$\mathcal{G} \cap \mathcal{F}$$

$$= x - y - z = 0 \wedge y = z = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

$$\mathcal{G} \cap \mathcal{F} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$dim\mathcal{F} = dimvect\langle(1,0,0)\rangle = 1$$

$$dim\mathcal{G} = dimvect\langle(1,1,0),(1,0,1)\rangle = 2$$

$$dim\mathbb{R}^3 = dim\mathcal{F} + dim\mathcal{G}$$

3=3

بما ان

$= \mathcal{G} \cap \mathcal{F}$ اذن

بما ان $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$اي يشكلان مجموع مباشر