Université de Djilali Bounaama-Khemis Miliana **2019/2020**
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Technologie
2ème AnneeLMD ST

Méthodes Numériques

SERIE D'EXERCICES N^{O}2(avec solution)

EXERCICE N^{O}1:

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 18 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 16 \end{cases}$$

Résoudre ce système par la méthode de Gauss.

EXERCICE N^{O}2:

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

Résoudre ce système par la méthode de Gauss.

EXERCICE N^{0}3:

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 19 \end{cases}$$

Résoudre ce système par la méthode de Cholesky.

EXERCICE N^{0}4:

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + 14x_3 + 14x_4 = 6 \\ x_1 + 5x_2 + 14x_3 + 15x_4 = 7 \end{cases}$$

Résoudre ce système par la méthode de Cholesky.

Université de Djilali Bounaama-Khemis Miliana **2019/2020**
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Technologie
2ème AnneeLMD ST

Méthodes Numériques

SERIE D'EXERCICES N^{O}2(avec solution)

Sol. Ex.N^{O}1:

La forme matricielle $A.x = b$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \;;\; x=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix};\quad b = \begin{Bmatrix} 10 \\ 18 \\ 16 \end{Bmatrix} \quad;\quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 18 \\ 16 \end{Bmatrix}$$

$$[A:b] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & . & 10 \\ 3 & 2 & 3 & . & 18 \\ 1 & 4 & 9 & . & 16 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & . & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & . & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{17}{2} & . & 16 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & . & 10 \\ 0 & 0.5 & 1.5 & . & 3 \\ 0 & 0 & -2 & . & -10 \end{bmatrix}$$

$\boxed{A'}$ $\boxed{b'}$

$$A'x = b' \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 0 + 0.5x_2 + 1.5x_3 = 3 \\ 0 + 0 - 2x_3 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ -9 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

Sol. Ex.N^{O}2:

La forme matricielle $A.x = b$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix};\; x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix};\quad b = \begin{Bmatrix} 11 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{Bmatrix};\quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

Université de Djilali Bounaama-Khemis Miliana **2019/2020**
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Technologie
2èmeAnneeLMD ST

Méthodes Numériques

SERIE D'EXERCICES N^{O}2(avec solution)

$$[A:b] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 & . & 11 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & . & -1 \\ 3 & 1 & -4 & 1 & . & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & . & 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 & . & 11 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 1 & \frac{-5}{4} & . & \frac{-15}{4} \\ 0 & \frac{5}{2} & -4 & \frac{1}{4} & . & \frac{-25}{4} \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{7}{4} & . & \frac{9}{4} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 & . & 11 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 1 & \frac{-5}{4} & . & \frac{-15}{4} \\ 0 & 0 & \frac{-7}{3} & \frac{-11}{6} & . & \frac{-25}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & . & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 & . & 11 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 1 & \frac{-5}{4} & . & \frac{-15}{4} \\ 0 & 0 & \frac{-7}{3} & \frac{-11}{6} & . & \frac{-25}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{7} & . & \frac{27}{7} \end{bmatrix}$$

$\boxed{A'}$ $\boxed{b'}$

$$A'x = b' \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 11 \\ 0 - \frac{3}{2}x_2 + x_3 - \frac{5}{4}x_4 = \frac{-15}{4} \\ 0 + 0 - \frac{7}{3}x_3 - \frac{11}{6}x_4 = \frac{-25}{2} \\ 0 + 0 + \frac{9}{7}x_4 = \frac{27}{7} \end{cases} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Sol.Ex.N^{0}3:

La forme matricielle $A.x = b$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \; ; \; x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}; \; b = \begin{Bmatrix} 8 \\ 9 \\ 19 \end{Bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 9 \\ 19 \end{Bmatrix}$$

$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{2} = 1.414$; $l_{21} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$; $l_{31} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$

$l_{22} = \sqrt{a_{22} - {l_{21}}^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1.224$;

$l_{32} = \frac{a_{23} - l_{21}.l_{31}}{l_{22}} = \frac{1-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{12}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0.408$;

Méthodes Numériques

SERIE D'EXERCICES N^O2(avec solution)

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - {l_{31}}^2 - {l_{32}}^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{24-3-1}{2}} = \sqrt{\frac{20}{6}} = \sqrt{\frac{10}{3}} = 1.825$$

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{10}{3}} \end{bmatrix}$$

$L.y = b$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{10}{3}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 9 \\ 19 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \begin{cases} \sqrt{2} y_1 = \\ \frac{\sqrt{2}}{2} y_1 + \sqrt{\frac{3}{2}} y_2 = 9 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \sqrt{\frac{10}{3}} y_3 = 19 \end{cases} \quad ; \quad \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4\sqrt{2} \\ 5\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 4\sqrt{\frac{10}{3}} \end{Bmatrix}$$

$$L^T.x = y \quad ; \quad \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{10}{3}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4\sqrt{2} \\ 5\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 4\sqrt{\frac{10}{3}} \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Sol.Ex$N^0$4:

La forme matricielle $A.x = b$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 & 14 \\ 1 & 5 & 14 & 15 \end{bmatrix} \quad ; \quad x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} ; \quad b = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 7 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 & 14 \\ 1 & 5 & 14 & 15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 7 \end{Bmatrix}$$

Université de Djilali Bounaama-Khemis Miliana **2019/2020**
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Technologie
2ème AnneeLMD ST

Méthodes Numériques

SERIE D'EXERCICES N°2(avec solution)

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix}$$

$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1$; $l_{21} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = 1$; $l_{31} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = 1$; $l_{41} = 1$

$l_{22} = \sqrt{a_{22} - {l_{21}}^2} = \sqrt{5-1} = 2$; $l_{32} = \frac{a_{23} - l_{21}.l_{31}}{l_{22}} = \frac{5-1}{2} = 2$; $l_{42} = \frac{a_{24} - l_{21}.l_{41}}{l_{22}} = \frac{5-1}{2} = 2$

$l_{33} = \sqrt{a_{33} - {l_{31}}^2 - {l_{32}}^2} = \sqrt{14-1-4} = 3$; $l_{43} = \frac{a_{34} - l_{31}.l_{41} - l_{32}.l_{42}}{l_{33}} = \frac{14-1.1-2.2}{3} = 3$

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - {l_{41}}^2 - {l_{42}}^2 - {l_{43}}^2} = \sqrt{15-1-4-9} = 1$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L.y = b \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 7 \end{Bmatrix}; \quad \left\{ \begin{matrix} y_1 = 1 \\ y_1 + 2y_2 = 3 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 6 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 = 7 \end{matrix} \right. \quad ; \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$L^T.x = y \; ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{-2}{3} \\ 1 \end{Bmatrix}$$