تمارين محلولة في دالة الإنتاج

التمرين الأول: لتكن لدينا دالة الإنتاج التالية: $Q = f(K,L) = 2LK$

المطلوب:أوجد الإنتاج الكلي عند النقطة (A)إحداثياتها $(K,L) = (10,20)$

2- إذا كان رأس المال ثابت و يساوي 10 فأوجد الإنتاجية الحدية , و المتوسطة للعمل ؟

3- إذا كان العمل ثابت و يساوي 20 فأوجد الإنتاجية المتوسطة و الحدية لرأس المال ؟

4- أوجد المرونة الجزئية لكل من K,L عند النقطة (A)؟

5- إذا زاد كل من العمل و رأس المال بـ15 % فما هي نسبة الزيادة في الإنتاج ؟

الحل :

1- $Q = f(K,L) = 2LK = 2(10)(20) = 400$

إذا كان رأس المال ثابت K = 10 تصبح دالة الإنتاج بالشكل التالي:

$$Q = f(10,L) = 20L$$

و منه الإنتاجية الحدية لعنصر العمل هي : $mP_L = \frac{\delta Q}{\delta L} = 20$

و الإنتاجية المتوسطة هي :

$$AP_L = \frac{Q}{L} = 20$$

2 - إذا كان العمل ثابت $L = 20$ تصبح دالة الإنتاج بالشكل التالي

$$Q = f(K,20) = 40K =$$

و منه الإنتاجية الحدية لعنصر رأس المال هي : $mP_k = \frac{\delta Q}{\delta K} = 40$

و الإنتاجية المتوسطة هي :

$$AP_k = \frac{Q}{K} = 40$$

3- المرونة الجزئية بالنسبة لـ L

$$E_L = \frac{\delta Q}{\delta L} \times \frac{L}{Q} = 2K \times \frac{L}{2KL} \Rightarrow E_L = 1 \quad .$$

المرونة الجزئية بالنسبة لـ K

$$E_K = \frac{\delta Q}{\delta K} \times \frac{K}{Q} = 2L \times \frac{K}{2KL} \Rightarrow E_K = 1$$

5 – إذا زاد العمل و رأس المال بـ 15% فماهي نسبة الزيادة في الإنتاج :

$$\Delta K = 15\% \qquad \Delta L = 15\%$$

و منه يصبح لدينا : $L = L + \Delta L \rightarrow L = 20 + 3 = 23$

$$K = K + \Delta K \rightarrow K = 10 + 1.5 = 11{,}5$$

و بذالك تصبح كمية الإنتاج تساوي إلى: $Q = f(L,K) = 2KL = 2(23)(11{,}5) = 529$

يعني أن نسبة الزيادة في الإنتاج هي : $529 - 400 = 129 \rightarrow \frac{129 \times 100}{529} = 24{,}38\%$

أي نسبة الزيادة هي :24,38%

التمرين الثاني:

لتكن لدينا دالة الإنتاج التالية: $Q = 10(LK)^2 - (LK)^3$

المطلوب :

1- ماهي كمية العمل التي تضمن أقصى إنتاج ممكن إذا كان $K = 1$

2- إنطلاقا من من أي قيمة يزداد الإنتاج بمعدل متناقص؟

3- حدد مناطق الإنتاج الثلاث؟

الحل :

إذا كان $K=1$ فإن دالة الإنتاج تصبح $Q=f(L,1)=10(L)^2-(L)^3$

هذه الدالة تصل إلى أعظم قيمة إذا كانت المشتقة الأولى تساوي الصفر و منه :

$$20L-3L^2=0 \Rightarrow L(20-3L)=0$$

و منه0= L مرفوضة (نقطة المبدأ)

$$\Rightarrow (20-3L)=0 \rightarrow L=\frac{20}{3}$$

2- يزداد الإنتاج بمعدل متناقص إبتداءا من القيمة التي تكون فيها المشتقة الثانية مساوية للصفر أي من نقطة الإنعطاف :

$$20-6L=0 \rightarrow L=\frac{20}{6}$$

3- **حدود المناطق الثلاث** : الإنتاجية المتوسطة تساوي إلى الإنتاجية الحدية:

$$AP_L=mP_L \Rightarrow 10L-L^2=20L-3L^2 \rightarrow 10L-2L^2=0$$
$$L_1=0 \qquad L_2=5$$

و منه

الإولى $L_1=0$ مرفوضة لإن المبدأ ينتمي لهذه النقطة و منه :

المنطقة الأول :تبدأ من الصفر إلى النقطة 5

الإنتاج الجدي يساوي الصفر $mP_L=0$ يعني أن قيمة $L=\frac{20}{3}$

المنطقة الثانية : $5 \xrightarrow{a} \frac{20}{3}$

المنطقة الثالثة : $\frac{20}{3} \xrightarrow{A} \infty$

التمرين الثالث :

إذا قدرت الإنتاجية المتوسطة لمؤسسة ما على الشكل التالي: $AP_L = 30 + 12L - L^2$

حيث L عدد العمال المستعملين في سيرورة الإنتاج

1- حدد الإنتاجية الحدية االعمل mP_L

2-حدد مناصب العمل في بداية المنطقة الثانية و الثالثة و حجم الإنتاج المقابل لذلك

الحل :

$$AP_L = 30 + 12L - L^2$$

1- البحث أولا عن الإنتاج الكلي : $TP_L = AP_L \times L = 30L + 12L^2 - L^3$

وبالتالي فإن الإنتاج الحدي هو : $mP_L = \dfrac{d(TP_L)}{dL} = 30 + 24L - 3L^2$

2- تحديد مناصب العمل في بداية المنطقة الثانية :

أو $AP_L = mP$

$$(AP_L)' = 0 \rightarrow 30 + 12L - L^2 = 30 + 24L - 3L^2$$

$$12L - 2L^2 = 0 \rightarrow L(12 - 2L) = 0 \rightarrow L = 0 \quad et\ L = 6$$

و منه $\Rightarrow \begin{cases} L = 0 \\ L = 6 \end{cases}$

حجم الإنتاج المقابل لـ $L = 6$

بالتعويض في دالة الناتج الكلي نحصل على : $TP_L = 30(6) + 12(6)^2 - (6)^3 = 400$

- تحديد مناصب العمل في بداية المنطقة الثانية :

$$mP_L = 0 \rightarrow 30 + 24L - 3L^2 = 0 \rightarrow L_1 = 1{,}09 \quad L_2 = 9{,}09$$

كمية الناتج في هذه الحالة هي : بالتعويض عن قيمةL في المعادلة نجد :

$$TP_L = 30(1,09) + 12(1,09)^2 - (1,09)^3 = 45,66$$

$$TP_L = 30(9,09) + 12(9,09)^2 - (9,09)^3 = 513,15$$

عند $L_1 = 1,09$ فإن الإنتاج الكلي = $45,66$

و عند $L_2 = 9,09$ فإن الإنتاج الكلي = $513,15$

وبالتالي فإن حجم العمل الذي يحقق أكبر إنتاج هو $L_2 = 9,09$

التمرين الرابع :

لنفرض أن إنتاج سلعة معينة يتم عن طريق إستخدام نوعين من عوامل الإنتاج رأس المال K والعمل L المعادلة التي تربط بين هذين العنصرين هي من الشكل التالي :

$$Q = 10(LK)^2 - (LK)^3$$

مخزون رأس المال معطى بـ $K = 1$

1- ماهو حجم العمل الذي يضمن أكبر إنتاج ممكن ؟

2- ماهو حجم العمل الذي يسمح بالحصول على أكبر إنتاجية وحدوية أعظمية ؟

3- إنطلاقا من أي قيمة لـ Q يبدأ الإنتاج في التزايد لكن بمعدل متناقص؟

الحل :

إذا كان $K = 1$ تصبح دالة إنتاج بالشكل $TP_L = 10L^2 - L^3$

من هذه المعادلة يمكن إستخراج الإنتاج المتوسط $AP_L = \frac{Q}{L} = 10L - L^2$

و الإنتاج الحدي من الشكل : $mP_L = \frac{\delta Q}{\delta L} = 20L - 3L^2$

تكون دالة الإنتاج في أعظم قيمة لها عندما يكون مشتقها الأول يساوي الصفر

$$\Rightarrow mPl = = \frac{d(Q)}{dL} = \quad mP_L = \frac{\delta Q}{\delta L} = 20L - 3L^2 = 0 \rightarrow L = 0\, et \quad L = \frac{20}{3}$$

نلاحظ أن هناك قيمتين للعمل التي تحقق $mPl = 0$

$$L = 0 \Rightarrow Q = 0$$
$$L = 20/3 \Rightarrow Q = 148{,}14$$

$L = \frac{20}{3}$ هي حجم العمل الذي يسمح بالحصول على أكبر إنتاجية وحدوية أعظمية

3 – الإنتاجية بالوحدة معطاة : $AP_L = 10L - L^2$

هذه المعادلة تأخذ أعظم قيمة لها إذا كان مشتقها الأول يساوي الصفر:

$$\frac{d(AP_L)}{dL} = 0 \rightarrow 10 - 2L = 0 \rightarrow L = 5$$

المشتق الثاني : $\frac{\delta^2 APl}{\delta^2 L} = -2 \prec 0$

من أجل $L = 5 \Rightarrow AP_L = 25$

3 – دراسة mP_L بين أن الإنتاجية الحدية موجبة في حالة : $0 \prec L \prec \frac{20}{3}$ من أجل قيمة L محصورة بين القيمتين لدينا تزايد في الإنتاج مع ذالك أن تزايد PT_L لايكون دائما في التزايد بنفس الإيقاع في المجال السابق

عند دراسة mP_L نلاحظ بأن هذا الأخير يتزايد في المجال $0 \prec L \prec \frac{10}{3}$ و يتزايد كذالك في المجال $\frac{10}{3} \prec L \prec \frac{20}{3}$

mP_L يكون في أعظم قيمة له عند $L = \frac{10}{3}$ هذا يدل على أن في الوهلة الأولى أن الإنتاج الكلي Q يتزايد بمعدل متزايد (في مرحلة الصعود لمنحنى الناتج الحدي) و عند تجاوز القمة (يعني أعلى نقطة على منحنى الناتج الحدي) إرتفاع الإنتاج الكلي يكون بمعدل متناقص (في مرحلة هبوط منحنى الناتج الحدي) النقطة الغير مرنة لمنحنى الناتج الكلي لعنصر العمل $L = \frac{10}{3}$ يعني القيمة التي تعظم الإنتاجية الحدية

<u>التمرين الخامس</u> :لتكن لدينا دالة مؤسسة إنتاجية محددة كالتالي

$$PT = 9L^{2/3}K^{1/3}$$

حيث L وK هما على التوالي كميات عوامل الإنتاج العمل ورأس المال.

المطلوب

1. المؤسسة تتواجد في بداية النشاط أي في المدى القصير حيث أن رأس المال محدد ب 27 تأكد من أن الناتج الحدي للعمل متناقص. علق على ذلك.
2. أين تتواجد المؤسسة من مراحل الإنتاج الثلاثة؟
3. إذا كانت أسعار العمل ورأس المال هما على الشكل التالي: $P_L = 3$ و$P_K = 1$ حدد دوال التكلفة الكلية والمتوسطة والحدية.
4. أوجد الناتج الحدي والمتوسط والمعدل الحدي للإحلال لعاملي الإنتاج.
5. أرسم منحنى مسار التوسع لأجل $PT = 81$.
6. ماهي عوائد أو غلة الحجم لدالة الإنتاج هذه؟

الحل

1. التأكد من أن الناتج الحدي للعمل متناقص:

$$PT = 9L^{2/3}K^{1/3} \quad , \; K = 27$$

$$PT = 9L^{2/3}27^{1/3} \Rightarrow PT = 9L^{2/3}3 \Rightarrow PT = 27L^{2/3}$$

$$MPL = \frac{\Delta PTL}{\Delta L} \Rightarrow MPL = \frac{2}{3} \times 9L^{-1/3} = 6L^{-1/3}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2L^{-4/3} < 0$$

$$\frac{\partial^2 MPL}{\partial L^2} = 6L^{-7/3} > 0$$

ما دام المشتق الأول للناتج الحدي للعمل يكون متناقصا باستمرار.

2. المؤسسة تتواجد في المرحلة الثانية لأن الناتج الحدي للعمل متناقص باستمرار وهي المرحلة الفعالة للإنتاج.

3. دوال التكاليف الكلية والمتوسطة والحدي:

$$TC = P_L\, L + P_K\, K \Rightarrow TC = 3L + K$$

$$TC = 3L + 27$$

من المطلب الأول وجدنا بان:

$$PT = 27L^{2/3} \Rightarrow L = \left(\frac{PT}{27}\right)^{3/2}$$

دالة التكلفة الكلية هي: $TC = 3\left(\frac{PT}{27}\right)^{3/2} + 27$

دالة التكلفة المتوسطة هي: $AC = 3\,\frac{PT^{1/2}}{27^{3/2}} + \frac{27}{Q}$

دالة التكلفة الحدية هي: $MC = \frac{\partial TC}{\partial Q} = \frac{9}{2} \times \frac{PT^{1/2}}{27^{3/2}}$

4. الناتج الحدي والمتوسط والمعدل الحدي للإحلال لعاملي الإنتاج:

$$PT = 9L^{2/3}K^{1/3}$$

$$MPL = \frac{dPT}{dL} = 6L^{-1/3}K^{1/3} = 6\left(\frac{K}{L}\right)^{1/3}$$

$$MPK = 3L^{2/3}K^{-1/3} = 3\left(\frac{L}{K}\right)^{2/3}$$

$$APL = \frac{PT}{L} = 9L^{-1/3}K^{1/3} = 9\left(\frac{K}{L}\right)1^{/3}$$

$$APK = \frac{PT}{K} = 9L^{2/3}K^{-1/3} = 9\left(\frac{L}{K}\right)^{2/3}$$

$$\text{TMS}= \frac{MPL}{MPK} = \frac{6(\frac{K}{L})1/3}{3(\frac{L}{K})2/3} = 3\,\frac{K}{L}$$

5. منحنى مسار التوسع:

$$PT = 81 \Rightarrow 81 = 9L^{2/3}K^{1/3}$$

$$\Rightarrow 9 = L^{2/3}K^{1/3} \Rightarrow K^{1/3} = \frac{9}{L^{2/3}} \Rightarrow K = \frac{729}{L^2}$$

$$\Rightarrow K = \frac{729}{L^2}$$

6. عوائد غلة الحجم لهذه الدالة:

$$PT = 9L^{2/3}K^{1/3}$$

$$PT1 = 9t^{2/3}L^{2/3}t^{1/3}K^{1/3} \Rightarrow PT1 = 9t^{2/3+1/3}L^{2/3}K^{1/3} \Rightarrow PT1 = 9T^1L^{2/3}K^{1/3}$$

نعني بغلة الحجم أو عوائد غلة الحجم في المدى الطويل معدل تزايد الناتج الكلي بالنسبة لتزايد عوامل الإنتاج. بالنسبة لهذا التمرين فان غلة الحجم هي من النوع الثابت وذلك لأن مجموع الأسس لعوامل الإنتاج في دالة الانتاج يساوي الواحد:

$$\alpha = \frac{2}{3}\ ;\ \beta = \frac{1}{3}\ \rightarrow \alpha + \beta = 1$$