حل الجزء الثاني من السلسلة 05

التمرين السادس

لدينا دالة الإنتاج $\varphi = \sqrt{L}\sqrt{K}$

① نوع هذه الدالة:

الدالة من النوع كوب دغلاس وهي من الشكل: $\varphi = A L^{\alpha} K^{\beta}$

حيث يمكن كتابة دالة الإنتاج بالشكل التالي

$$\varphi = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$$

ومنه يمكن القول أن:

في هذه الدالة $A=1$

$\beta = \alpha = \frac{1}{2}$ وهي مرونة العمل و رأس المال

② إيجاد درجة تجانس الدالة:

$$\varphi = f(tL, tK) = (tL)^{\frac{1}{2}} (tK)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi = f(tL, tK) = t^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} = t^{1} \underbrace{L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}}_{\varphi}$$

$$\varphi = f(tL, tK) = t^{1} . \varphi$$

إذن الدالة متجانسة من الدرجة (1):

وبما أن $\alpha + \beta = 1$ فإن نوع غلة الحجم ثابتة

③ إيجاد دالة الإنتاج الحدي والمتوسط لكل من العمل (L) ورأس المال (K)

- إيجاد دالة الإنتاج الحدي للعمل و رأس المال

$$P_{mL} = \frac{d\varphi}{dL} = K^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{P_{mL} = \frac{1}{2} . \frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}}}$$ ← الإنتاج الحدي للعمل

$$P_{mK} = \frac{d\varphi}{dK} = L^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} K^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{P_{mK} = \frac{1}{2} \frac{L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}}}$$ ← الإنتاج الحدي لرأس المال

- إيجاد الإنتاج المتوسط للعمل (L) ورأس المال K

الإنتاج المتوسط للعمل

$$PM_L = \frac{\varphi}{L} = \frac{L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}}{L} = \frac{L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}} = PM_L}$$

الإنتاج المتوسط رأس المال

$$PM_K = \frac{\varphi}{K} = \frac{L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}}{K} = \frac{L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}} = PM_K}$$

④- إيجاد التوليفة المثلى من L و K التي تحقق إنتاج قدره 40 وحدة مع العلم أن $\left.\begin{matrix} P_L = 2 \\ P_K = 3 \end{matrix}\right\}$

$$\mathcal{L} = LP_L + KP_K + \lambda(\varphi - f(L,K)) \Rightarrow \mathcal{L} = 2L + 3K + \lambda(40 - \sqrt{L}\sqrt{K})$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{L}}{dL} = 0 \Rightarrow 2 - \dfrac{\sqrt{K}}{2\sqrt{L}} = 0 \Rightarrow 2 = \dfrac{\sqrt{K}}{2\sqrt{L}} \quad \dots (1) \\ \dfrac{d\mathcal{L}}{dK} = 0 \Rightarrow 3 - \dfrac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}} = 0 \Rightarrow 3 = \dfrac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}} \quad \dots (2) \\ \dfrac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = 0 \Rightarrow 40 - \sqrt{L}\sqrt{K} = 0 \Rightarrow 40 = \sqrt{L}\sqrt{K} \quad \dots (3) \end{cases}$$

بقسمة المعادلة $\frac{(1)}{(2)}$ نجد

$$\frac{2}{3} = \frac{\frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{L}}}{\frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}}} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{L}} \times \frac{2\sqrt{K}}{\sqrt{L}} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2K}{2L} \Rightarrow \boxed{K = \frac{2L}{3}} \quad (4)$$

بتعويض (4) في (3) نجد:

$$40 = \sqrt{L}\sqrt{\frac{2L}{3}} \Rightarrow 40 = \sqrt{L}\sqrt{L}\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow 40 = L\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow L = \frac{40}{\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$$L = \frac{40}{0,816} \Rightarrow \boxed{L = 49,01}$$

نعلم أن $K = \frac{2L}{3} = \frac{2(49,01)}{3} \Rightarrow \boxed{K = 32,67}$

حل التمرين السابع: لدينا $Q = 10K^{0,7}L^{0,1}$ ، $P_L = 10,\ P_K = 28$

① إيجاد حجم الإنتاج الأمثل عند إنفاق 4000 و.ن:

$$\mathcal{L} = f(L,K) + \lambda(CT - LP_L - KP_K)$$

$$\mathcal{L} = 10L^{0,1}K^{0,7} + \lambda(4000 - 10L - 28K)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dL,K,\lambda} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{L}}{dL} = 0 \Rightarrow 10(0,1)L^{-0,9}K^{0,7} - 10\lambda = 0 \Rightarrow L^{-0,9}K^{0,7} = 10\lambda \quad \ldots(1) \\ \dfrac{d\mathcal{L}}{dK} = 0 \Rightarrow 10(0,7)K^{-0,3}L^{0,1} - 28\lambda = 0 \Rightarrow 7K^{-0,3}L^{0,1} = 28\lambda \quad \ldots(2) \\ \dfrac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = 0 \Rightarrow 4000 - 10L - 28K = 0 \quad \ldots(3) \end{cases}$$

بقسمة المعادلة $\frac{1}{2}$ نجد:

$$\frac{L^{-0,9}K^{0,7}}{7K^{-0,3}L^{0,1}} = \frac{10\lambda}{28\lambda} \Rightarrow \frac{K^{0,7}K^{0,3}}{7L^{0,1}L^{0,9}} = \frac{5}{14}$$

$$\Rightarrow \frac{K}{7L} = \frac{5}{14} \Rightarrow 14K = 35L \Rightarrow K = \frac{35L}{14} \Rightarrow \boxed{K = \frac{5}{2}L} \quad \ldots(4)$$

بتعويض المعادلة ④ في ③ نجد:

$$4000 - 10L - 28\left(\frac{5}{2}L\right) = 0 \Rightarrow 4000 = 10L + 70L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4000 = 80L \Rightarrow L = \frac{4000}{80} = \boxed{50 = L}$$

نعلم أن

$$K = \frac{5}{2} . L$$

$$K = \frac{5}{2} . 50 \Rightarrow \boxed{K = 125}$$

إذن حجم الإنتاج الأمثل لـ نفقات 4000 ون هو

$$Q = 10(125)^{0,7}(50)^{0,1} = \boxed{434,24 = Q}$$

حل التمرين الثامن: لدينا دالة الإنتاج

$Q = 50 K^{0,4} L^{0,6}$, $P_L = 6$, $P_K = 2$

$CT = 600$

• إيجاد التركيبة المثلى من عوامل الإنتاج لتعظيم الإنتاج الكلي

$\mathcal{L} = 50 L^{0,6} K^{0,4} + \lambda(600 - 6L - 2K)$

$\frac{d\mathcal{L}}{dL, K, \lambda} = 0$

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{L}}{dL} = 0 \Rightarrow 50 K^{0,4}\, 0,6 L^{-0,4} - 6\lambda = 0 \Rightarrow 30 K^{0,4} L^{-0,4} = 6\lambda \dots (1) \\ \frac{d\mathcal{L}}{dK} = 0 \Rightarrow 50 L^{0,6} (0,4) K^{-0,6} - 2\lambda = 0 \Rightarrow 20 L^{0,6} K^{-0,6} = 2\lambda \dots (2) \\ \frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = 0 \Rightarrow 600 - 6L - 2K = 0 \Rightarrow 600 = 6L + 2K \dots (3) \end{cases}$$

بقسمة المعادلة $\frac{1}{2}$ نجد

$$\frac{30 K^{0,4} L^{-0,4}}{20 L^{0,6} K^{-0,6}} = \frac{6\lambda}{2\lambda} \Rightarrow \frac{3 K^{0,4} K^{0,6}}{2 L^{0,6} L^{0,4}} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{3K}{2L} = 3 \Rightarrow 3K = 6L \Rightarrow K = \frac{6L}{3} = \boxed{2L = K} \dots (4)$$

بتعويض المعادلة 4 في 3 نجد

$$600 = 6L + 2.2L \Rightarrow 600 = 10L \Rightarrow L = \frac{600}{10} = \boxed{60 = L}$$

$$K = 2L \Rightarrow \boxed{K = 120}$$

نعلم أن:

إذن التركيبة المثلى من عوامل الإنتاج لتعظيم الإنتاج الكلي هي $L = 60$ و $K = 120$

• حساب الإنتاج الكلي عند هذه النقطة

$$Q = 50(120)^{0,4}(60)^{0,6} = \boxed{3958,5 = Q}$$

حل التمرين التاسع: لدينا دالة الإنتاج

$$Q = 2(LK)^{\frac{1}{2}} = 2L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} \quad , \quad P_L = 9 \; , \; P_K = 4$$

① إيجاد دالتي الإنتاج الحدي والمتوسط لكل من العمل ورأس المال:

• إيجاد دالتي الإنتاج الحدي:

$$P_{mL} = \frac{dQ}{dL} = 2K^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}L^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow P_{mL} = \frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}}$$ الإنتاج الحدي للعمل

$$P_{mK} = \frac{dQ}{dK} = 2L^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow P_{mK} = \frac{L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}}$$ الإنتاج الحدي لرأس المال

• إيجاد الإنتاج المتوسط للعمل ولرأس المال

$$PM_L = \frac{Q}{L} = \frac{2L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}}{L} = \frac{2K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}}$$ الإنتاج المتوسط للعمل

$$PM_K = \frac{Q}{K} = \frac{2L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}}{K} = \frac{2L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}}$$ الإنتاج المتوسط لرأس المال

② إيجاد حجم العمل (L) و رأس المال (K) لإنتاج 100 وحدة:

$$\mathcal{L} = LP_L + KP_K + \lambda(Q - f(L,K))$$

$$\mathcal{L} = 9L + 4K + \lambda(100 - 2L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \Rightarrow 9 - \lambda \cancel{2} K^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\cancel{2}} L^{-\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow 9 = \frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}} \quad \dots (1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \Rightarrow 4 - \lambda 2 L^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow 4 = \frac{L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}} \quad \dots (2) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 100 - 2L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow 100 = 2L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} \quad \dots (3) \end{cases}$$

بقسمة المعادلة $\frac{①}{②}$ نجد:

$$\frac{9}{4} = \frac{\frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}}}{\frac{L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}}} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}} \frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{K}{L}$$

$$\Rightarrow 9L = 4K \Rightarrow \boxed{K = \frac{9}{4}L} \quad \dots (4)$$

بتعويض ④ في المعادلة ③ نجد

$$100 = 2L^{\frac{1}{2}}\left(\frac{9}{4}L\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 100 = 2L^{\frac{1}{2}}\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 100 = 2L^{\frac{1}{2}}\frac{3}{2}L^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 100 = 3L \Rightarrow \boxed{L = \frac{100}{3}}$$

نعلم أن $K = \frac{9}{4}L$

$$\Rightarrow K = \frac{9}{4}\frac{100}{3} \Rightarrow \boxed{K = 75}$$

③ ايجاد حجم الإنتاج الأمثل إذا كانت التكلفة الكلية $504 = CT$

$$\mathcal{L} = f(L,K) + \lambda(CT - LP_L - KP_K)$$

$$\mathcal{L} = 2L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} + \lambda(504 - 9L - 4K)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dL} = 0 \Rightarrow 2K^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}L^{-\frac{1}{2}} - 9\lambda = 0 \Rightarrow \frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}} = 9\lambda \quad \dots (1)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dK} = 0 \Rightarrow 2L^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}} - 4\lambda = 0 \Rightarrow \frac{L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}} = 4\lambda \quad \dots (2)$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = 0 \Rightarrow 504 - 9L - 4K = 0 \Rightarrow 504 = 9L + 4K \quad \dots (3)$$

بقسمة المعادلة $\frac{①}{②}$ نجد

$$\frac{\frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}}}{\frac{L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}}} = \frac{9\lambda}{4\lambda} \Rightarrow \frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}}\frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{9}{4} \Rightarrow K = \frac{9L}{4} \quad \dots (4)$$

نتعويض المعادلة ④ في المعادلة ③ نجد

$$504 = 9L + 4\frac{9}{4}L \Rightarrow 18L = 504 \Rightarrow L = 504/18$$

$$L = 28 \Rightarrow K = \frac{9}{4}28 \Rightarrow K = 63$$

④ حساب مقدار الربح المحقق إذا كان سعر البيع هو 13 و.ن

• نعلم أن التكلفة الكلية $504 = CT$ و.ن

• حساب الإيراد الكلي: أولا إيجاد الإنتاج الكلي.

$$Q = 2(28)^{\frac{1}{2}}(63)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{84 = Q} \Rightarrow \boxed{RT = Q.P_V} = 84.13 = 1092$$

الإيراد الكلي $= 1092$

الربح = الإيراد الكلي - التكلفة الكلية

$$\boxed{\pi = 588} = 504 - 1092 = CT - RT = \pi$$

حل التمرين العاشر : لدينا $\varphi = L^{\alpha} K^{B}$

① حساب قيمة α و B علما أن مرونة الانتاج بالنسبة للعمل $E_L = 0{,}5$ ودالة الانتاج متجانسة من الدرجة 2 :

نعلم أن

E_L المرونة الجزئية للعمل هو أس L $\Leftarrow$ $\boxed{0{,}5 = \alpha}$

كما نعلم أن درجة تجانس الدالة هو 2 إذن

$$\alpha + B = 2 \Rightarrow 0{,}5 + B = 2 \Rightarrow B = 2 - 0{,}5 = \boxed{1{,}5 = B}$$

$$\boxed{\varphi = L^{0{,}5} K^{1{,}5}}$$

② بما أن $\alpha + B = 2 > 1$ فإن نوع غلة الحجم متزايدة أي أن نسبة الزيادة في الإنتاج الكلي أكبر من نسبة الزيادة في عناصر الانتاج

③ إيجاد المسار الأمثل للتطور : في ظل غياب P_L و P_K يمكن إيجاد مسار التطور بالشكل التالي

$$\frac{P_{mL}}{P_{mK}} = \frac{P_L}{P_K}$$

$$P_{mL} = \frac{d\varphi}{dL} = K^{1{,}5}\, 0{,}5\, L^{-0{,}5} = P_{mL}$$

$$P_{mK} = \frac{d\varphi}{dK} = L^{0{,}5}\, 1{,}5\, K^{0{,}5} = P_{mK}$$

$$\frac{P_{mL}}{P_{mK}} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K^{1{,}5}(0{,}5)L^{-0{,}5}}{L^{0{,}5}(1{,}5)K^{0{,}5}} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K^{1{,}5}K^{-0{,}5}}{3L^{0{,}5}L^{0{,}5}} = \frac{P_L}{P_K}$$

$$\frac{K}{3L} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow K P_K = 3L P_L \Rightarrow \boxed{K = \frac{3L P_L}{P_K}}$$

معادلة المسار الأمثل للتطور

المسار الأمثل للتطور: هو ذلك المنحنى الذي يربط بين نقاط توازن المنتج عندما تتغير التكلفة مع ثبات أسعار عوامل الإنتاج.

④ إيجاد دوال الطلب على عناصر الإنتاج لكل من K و L :

بالنسبة لدالة الطلب على K هي نفسها معادلة المسار الأمثل للتطور

$$\boxed{K = \frac{3LP_L}{P_K}}$$ دالة الطلب على K

بالنسبة لدالة الطلب على L هي

نعلم ان

$$\frac{P_{mL}}{P_{mK}} = \frac{P_L}{P_K}$$

$$\Rightarrow \frac{0{,}5L^{-0{,}5}K^{1{,}5}}{1{,}5K^{0{,}5}L^{0{,}5}} = \frac{P_L}{P_K}$$

$$\frac{K}{3L} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow 3LP_L = KP_K \Rightarrow$$

$$\boxed{L = \frac{KP_K}{3P_L}}$$ دالة الطلب على L

حل التمرين الحادي عشر : لدينا $Q=\left(L^{-0,5}+K^{-0,5}\right)^{-2}$

$P_L=64 \qquad P_K=8$

① باستخدام صيغة لاغرانج أوجد أقصى إنتاج يمكن الحصول عليه بتكلفة قدرها $CT=6480$ ؟

$$\mathcal{L}=\left(L^{-0,5}+K^{-0,5}\right)^{-2}+\lambda\left(6480-64L-8K\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{L}}{dL}=0 \Rightarrow -2\left(L^{-0,5}+K^{-0,5}\right)^{-3}(-0,5)L^{-1,5}-64\lambda=0 \ldots\ldots (3) \\ \dfrac{d\mathcal{L}}{dK}=0 \Rightarrow -2\left(L^{-0,5}+K^{-0,5}\right)^{-3}(-0,5)K^{-1,5}-8\lambda=0 \ldots\ldots (2) \\ \dfrac{d\mathcal{L}}{d\lambda}=0 \Rightarrow 6480-64L-8K=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

بقسمة المعادلة $\frac{①}{②}$ نجد

$$\frac{\cancel{-2}\cancel{\left(L^{-0,5}+K^{-0,5}\right)^{-3}}\cancel{(-0,5)}L^{-1,5}}{\cancel{-2}\cancel{\left(L^{-0,5}+K^{-0,5}\right)^{-3}}\cancel{(-0,5)}K^{-1,5}}=\frac{\overset{8}{\cancel{64}}\cancel{\lambda}}{\cancel{8}\cancel{\lambda}} \Rightarrow \frac{K^{1,5}}{L^{1,5}}=8$$

$$\frac{K\sqrt{K}}{L\sqrt{L}}=8 \Rightarrow \left(K\sqrt{K}\right)^2=\left(8L\sqrt{L}\right)^2 \Rightarrow K^3=64L^3$$

$\boxed{64=4^3}$ إذن

$$\cancel{K^3}=\cancel{(4L)^3} \Rightarrow \boxed{K=4L} \ldots\ldots ④$$

نقوم بتعويض ④ في ③ نجد

$$6480=64L-8(4L)=0 \Rightarrow 6480=64L+32L \Rightarrow 6480=96L$$

$$L=\frac{6480}{96}=67,5=L \qquad \Rightarrow K=4(67,5) \Rightarrow K=270$$

$$Q=\left[(67,5)^{-0,5}+(270)^{-0,5}\right]^{-2}=\boxed{30=Q} \longleftarrow$$ أقصى إنتاج

② إيجاد الحد الأدنى للتكاليف لإنتاج 25 وحدة

$$\mathcal{L} = 64L + 8K + \lambda\left(25 - \left(L^{-0,5} + K^{-0,5}\right)^{-2}\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 0 \Rightarrow 64 - \left[\left(L^{-0,5} + K^{-0,5}\right)^{-3}\left(-0,5L^{-1,5}\right)\right] = 0 \ \dots\dots\dots (1) \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0 \Rightarrow 8 - \left[\left(L^{-0,5} + K^{-0,5}\right)^{-3}\left(-0,5K^{-1,5}\right)\right] = 0 \ \dots\dots\dots (2) \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 25 - \left(L^{-0,5} + K^{-0,5}\right)^{-2} = 0 \ \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

بقسمة المعادلة $\frac{①}{②}$ نجد

$$\frac{64}{8} = \frac{\cancel{\left(L^{-0,5} + K^{-0,5}\right)^{-3}}\cancel{(-0,5)}L^{-1,5}}{\cancel{\left(L^{-0,5} + K^{-0,5}\right)^{-3}}\cancel{(-0,5)}K^{-1,5}} \Rightarrow 8 = \frac{L^{-1,5}}{K^{-1,5}} \Rightarrow 8 = \frac{K^{1,5}}{L^{1,5}}$$

$$K^{1,5} = 8L^{1,5} \Rightarrow K\sqrt{K} = 8L\sqrt{L}$$

$$\boxed{\text{لأن } K^{1,5} = K^{1} \cdot K^{0,5} = K\sqrt{K}}$$

نربع الطرفين حتى نتخلص من الجذر

$$(K\sqrt{K})^2 = (8L\sqrt{L})^2 \Rightarrow K^3 = 64L^3 \Rightarrow K^3 = (4L)^3$$

$$\Rightarrow \boxed{K = 4L} \ \dots (4)$$

بتعويض ④ في ③ نجد

$$25 - \left(L^{-0,5} + (4L)^{-0,5}\right)^{-2} = 0$$

$$25 = \left(\frac{1}{L^{0,5}} + \frac{1}{(4L)^{0,5}}\right)^{-2} \Rightarrow 25 = \left(\frac{1}{\sqrt{L}} + \frac{1}{2\sqrt{L}}\right)^{-2}$$

نعلم أن

$$\bullet\ L^{-0,5} = \frac{1}{L^{0,5}}$$

كما نعلم أن

$$\bullet\ \frac{1}{L^{0,5}} = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

$$25 = \left(\frac{3}{2\sqrt{L}}\right)^{-2} \Rightarrow 25 = \frac{1}{\left(\frac{3}{2\sqrt{L}}\right)^2} \Rightarrow 25 = \frac{1}{\frac{9}{4L}}$$

$$\Rightarrow 25 = \frac{4}{9}L \Rightarrow L = 25\ \frac{9}{4} = \boxed{56,25 = L} \Rightarrow \boxed{K = 225}$$

وهكذا تكون أدنى تكلفة لإنتاج 25 وحدة هي

$$CT = LP_L + KP_K$$

$$CT = 56,25(64) + 225(8) = \boxed{5400 = CT}$$