حل السلسلة رقم 05

حل التمرين الأول:

1. إيجاد الإنتاج المتوسط والإنتاج الحدي للعمل:

- الإنتاج المتوسط للعمل = الإنتاج الكلي / العمل $PM_L = \frac{PT}{L}$
- الإنتاج الحدي للعمل = التغير في الإنتاج الكلي/ التغير في العمل $P_{ML} = \frac{\Delta PT}{\Delta L}$

الأرض T	العمل L	الإنتاج الكلي PT	الإنتاج المتوسط PML	الإنتاج الحدي Pml
5	0	0	-	-
5	1	3	3	3
5	2	8	4	5
5	3	12	4	4
5	4	15	3,75	3
5	5	17	3,4	2
5	6	17	2,83	0
5	7	16	2,28	-1
5	8	13	1,6	-3

2. ينص قانون تناقص الغلة أنه عند تزايد أحد عناصر الإنتاج بوحدات متساوية كالعمل في هذا التمرين مع ثبات العوامل الأخرى كرأس المال (K=5) فإن الإنتاج الكلي يزيد بمعدل متزايد في البداية (مع العلم أن الإنتاج الكلي ما هو إلاّ مجموع الإنتاج الحدي) حتى مستوى معين الذي يزداد فيه بمعدل متناقص ومن ثم أي زيادة سوف تترجم بتناقص الإنتاج الكلي.PT .

ويبدأ تناقص الغلة عندما يلاحظ أنه مع تزايد إستخدام عنصر العمل على نفس القطعة الأرضية (K=5) فإن الإنتاج الحدي بعد مستوى معين يشرع في التناقص ، وذلك ما ينص عليه قانون تناقص الغلة، وهو القانون الذي

يبدأ مفعوله إبتداءا من النقطة حيث يكون الإنتاج الحدي في مستواه الأقصى أي عندما يكون $P_{ML} = 5$ بعدد عمال .L=2 .

3. وجود: إنتاج حدي موجب يعني الإنتاج الكلي يكون **متزايد**.

إنتاج حدي سالب يعني الإنتاج الكلي يكون **متناقص**.

إنتاج حدي معدوم يعني الإنتاج الكلي يكون **ثابت** وفي أقصاه.

4. تحديد **مراحل الإنتاج** الثلاث:

- المرحلة **الأولى** : تبدأ من : L=0 ⟵ $PM_L = P_{ML}$

تتميز هذه المرحلة بتزايد الإنتاج الكلي والمتوسط في نفس الوقت وهي تبدأ من النقطة L=0 إلى أن يتقاطع الإنتاج المتوسط مع منحنى الإنتاج الحدي (في نقطة التقاطع يكون الإنتاج الحدي والمتوسط متساويين) في هذه النقطة يكون الإنتاج المتوسط في أقصاه.

L=0 ⟵ L=3

- المرحلة **الثانية** : تبدأ من: $PM_L = P_{ML}$ ⟵ $P_{ML} = 0$

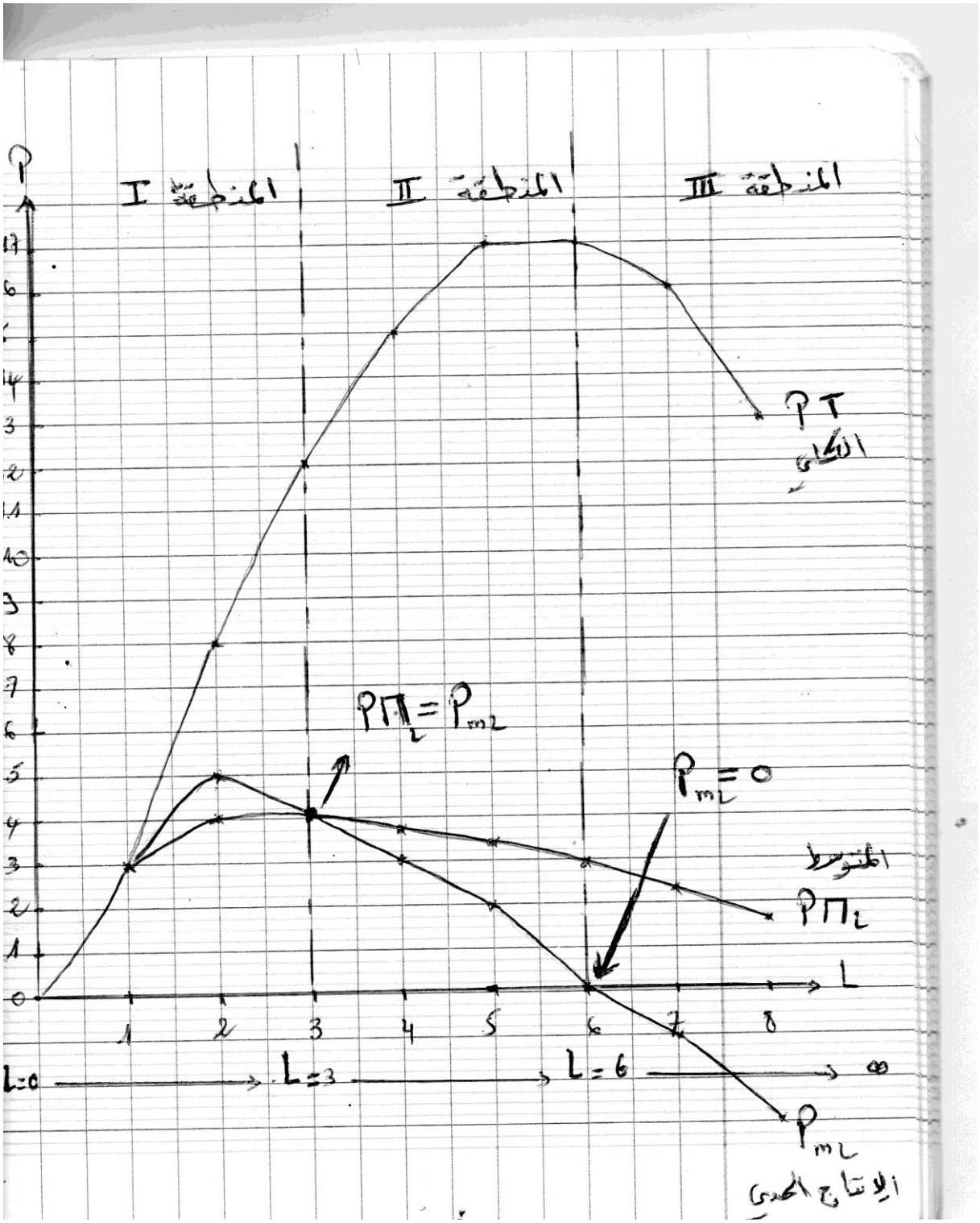
تتميز بتزايد الإنتاج الكلي وتناقص الإنتاج المتوسط والإنتاج الحدي ، وهي تبدأ من نقطة تقاطع الإنتاج المتوسط مع الإنتاج الحدي إلى غاية الإنتاج الحدي يساوي الصفر، وفي هذا التمرين تبدأ هذه المرحلة:

L=3 ⟵ L=6

- المرحلة **الثالثة** : تبدأ من $P_{ML} = 0$ ⟵ ∞

تتميز بتناقص الإنتاج الكلي و المتوسط مع وجود ناتج حدي سالب و هي تبدأ من :

L=6 ⟵ ∞


المنطقة I
المنطقة II
المنطقة III
P
P_T
الكلي
$P\Pi_L = P_{mL}$
$P_{mL} = 0$
المتوسط
$P\Pi_L$
L
P_{mL}
الإنتاج الحدي
L=0
L=3
L=6
∞

حل التمرين الثاني:

لدينا دالة الإنتاج الكلي بالشكل التالي : $Q = 5K^2L^2 - (LK)^3$

بما أن K=1 فإن دالة الإنتاج تصبح بالشكل التالي : $Q = 5L^2 - L^3$

1. حساب عدد العمال اللازم في **نهاية** المرحلة الأولى:

نعلم أن المرحلة الأولى تبدأ من : L=0 ⟵ إلى $PM_L = P_{ML}$

- $PM_L = \frac{Q}{L} = \frac{5L^2 - L^3}{L} = 5L - L^2 =$ $\boxed{5L - L^2 = PM_L}$
- $P_{ML} = \frac{dPT}{dL} =$ $\boxed{10L - 3L^2 = P_{ML}}$

بما أن $PM_L = P_{ML} \Rightarrow 5L - L^2 = 10L - 3L^2 \Rightarrow 3L^2 - L^2 + 5L - 10L = 0$

$\Rightarrow 2L^2 - 5L = 0 \Rightarrow L(2L-5) = 0 \Rightarrow$ إما L= 0 **مرفوضة**

أو $2L-5=0 \Rightarrow L = {}^{5}/_{2} =$ $\boxed{L = 2.5}$

عدد العمال اللازم في نهاية المرحلة الأولى هو L=2.5.

حساب الناتج الكلي عند هذه النقطة :

$$Q = 5(2.5)^2 - (2.5)^3 = 32.25 - 15.625 = 15.625$$

2. حساب عدد العمال اللازم للوصول إلى **نقطة الإنعطاف** على منحنى الناتج الكلي: نقطة الإنعطاف الأولى بالنسبة للناتج الكلي هو عندما يبدأ بالزيادة بمعدل متناقص أي عندما يكون الناتج الحدي في الذروة ، ولإيجاد عدد العمال في هذه النقطة نستعمل العلاقة التالية:

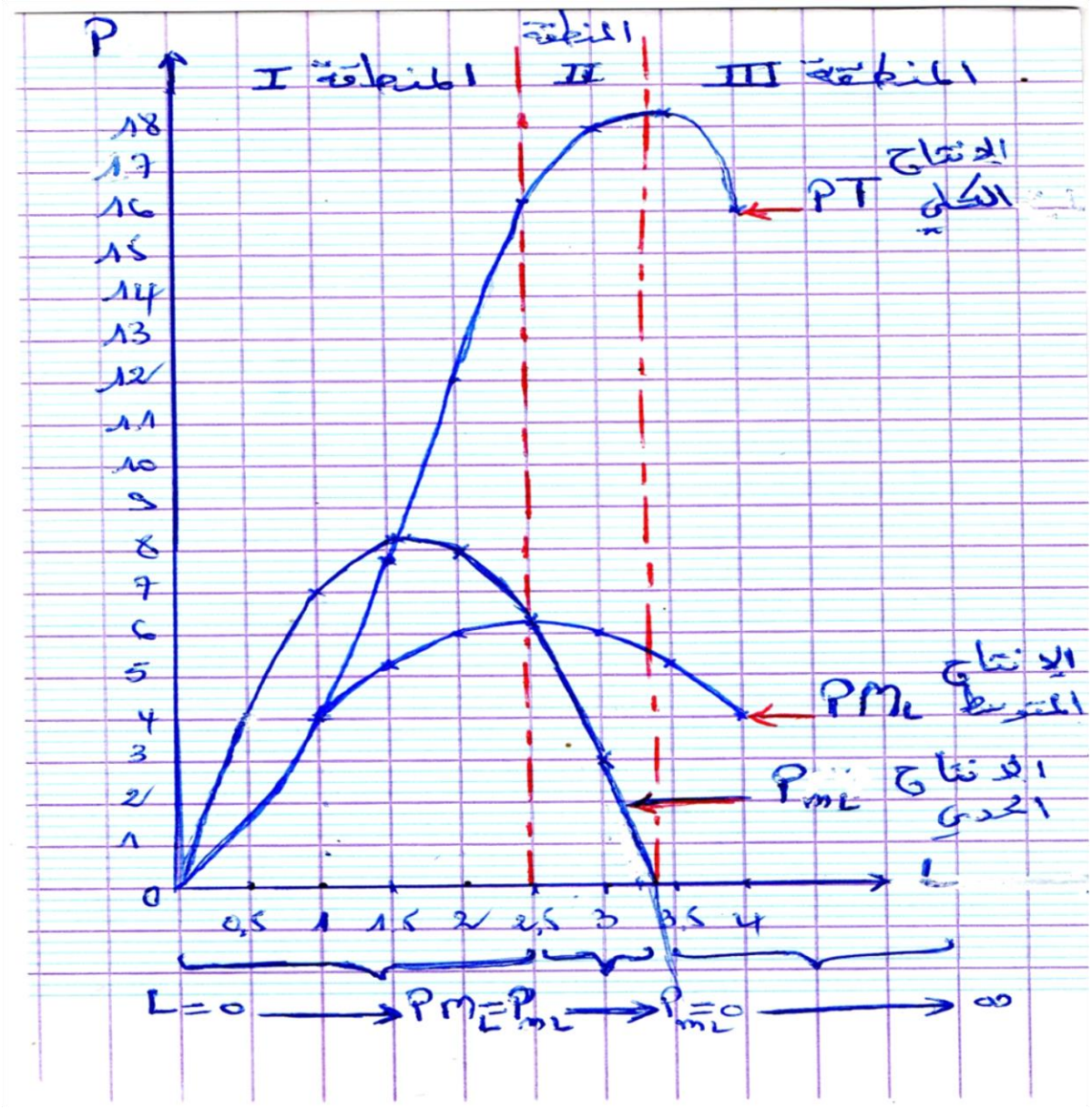
$(10L - 3L^2)' = 0 \Rightarrow 10 - 6L = 0 \Rightarrow L =$ $\boxed{L = 1.6}$

حساب الناتج الكلي عند هذه النقطة :

$$Q = 5(1.6)^2 - (1.6)^3 = 13.77 - 4.57 = 9.2$$

3. التمثيل البياني كل من الإنتاج الكلي والمتوسط والحدي في نفس المعلم:

L	0	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
PT	0	4	7.87	12	16.25	18	18.35	16
PM_L	-	4	5.25	6	6.25	6	5.25	4
P_{ML}	-	7	8.25	8	6.25	3	-6.7	-8



حل التمرين الثالث :

لدينا دالة الإنتاج المتوسط كالتالي: $PM_{\mathrm{L}} = 30 + 12\mathrm{L} - \mathrm{L}^2$

1. إيجاد دالة الإنتاج الحدي: نعلم أن دالة الإنتاج الحدي هو مشتق دالة الإنتاج الكلي، ونلاحظ جيدا أن لدينا دالة الإنتاج المتوسط وبالتالي أولا يجب إيجاد الإنتاج الكلي من العلاقة التالية:

$$PM_{\mathrm{L}} = \frac{PT}{\mathrm{L}} \Rightarrow \mathrm{PT} = PM_{\mathrm{L}}.\mathrm{L} = (30 + 12\mathrm{L} - \mathrm{L}^2)\,.\,\mathrm{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{PT = 30L + 12L^2 - L^3}$$

نعلم كذلك $P_{ML} = \frac{\mathrm{d}PT}{\mathrm{d}L} = 30 + 24L - 3L^2 \Rightarrow \boxed{P_{ML} = 30 + 24L - 3L^2}$

2. إيجاد عدد العمال اللازم الذي يحدد بداية ونهاية منطقة الإنتاج المثلى:

نعلم أن المنطقة المثلى هي المنطقة الثانية: $P_{ML} = 0 \longleftarrow PM_L = P_{ML}$

نقطة النهاية ⟵ نقطة البداية

- حساب نقطة البداية:

$$\Rightarrow PM_L = P_{ML} \;\; 30 + 12\mathrm{L} - \mathrm{L}^2 = 30 + 24L - 3L^2 \Rightarrow$$

$$30 + 12\mathrm{L} - \mathrm{L}^2 - 30 - 24\mathrm{L} + 3L^2 = 0 \Rightarrow -12\mathrm{L} + 2L^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{L}(-12 + 2\mathrm{L}) = 0$$

$\Rightarrow$ إما $\mathrm{L} = 0$ مرفوضة

أو $-12 + 2\mathrm{L} = 0 \Rightarrow 2\mathrm{L} = 12 \Rightarrow \mathrm{L} = {}^{12}/_{2} = \boxed{6 = \mathrm{L}}$

- حساب نقطة النهاية:

$$P_{ML} = 0 \;\; \Rightarrow 30 + 24L - 3L^2 = 0 \Rightarrow \Delta = B^2 - 4\,AC$$

$$\Rightarrow \Delta = 24^2 - 4(-3)(30) = 936 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{936} = 30.6$$

نعلم أن $L_1 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-24 - 30.6}{2(-3)} = 9.1 = L_1$

$L_2 = \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-24+30.6}{2(-3)} = -1.1 = L_2$ مرفوضة

إذن عدد العمال اللازم الذي يحدد بداية ونهاية منطقة الإنتاج المثلى هو

$PM_L = P_{ML}$ ⟵ $P_{ML} = 0$

L =6 ⟵ L =9.1

3. إيجاد عدد العمال اللازم عند بداية ونهاية المنطقة الأولى والثالثة:

نعلم أن: المنطقة الأولى تبدأ من : L = 0 ⟵ إلى $PM_L = P_{ML}$

إذن: L = 0 ⟵ إلى L = 6

كما نعلم أن المنطقة الثالثة تبدأ من :$P_{ML} = 0$ ⟵ إلى ∞

إذن : L = 9.1 ⟵ إلى ∞

<u>حل التمرين الرابع :</u>

لدينا دالة الإنتاج التالية : $Q = 2LK$

1. إيجاد الإنتاج الكلي عند النقطة (A) التي إحداثياتها (K , L) = (10 ; 20) :

$Q = 2LK = 2(20)(10) = 400$

2. إيجاد الإنتاجية الحدية والمتوسطة للعمل إذا كان K =10 :

هذا يعني أن دالة الإنتاج الكلي تصبح بالشكل التالي: $Q = 20L$

- إيجاد الإنتاجية الحدية للعمل P_{ML} : نعلم أن $P_{ML} = \frac{dQ}{dL}$

$$P_{ML} = \frac{dQ}{dL} \Rightarrow P_{ML} = 20$$

- إيجاد الإنتاجية المتوسطة للعمل PM_L : نعلم أن $PM_L = \frac{Q}{L}$

$$PM_L = \frac{Q}{L} = \frac{20L}{L} \Rightarrow PM_L = 20$$

3. إيجاد الإنتاجية الحدية والمتوسطة لرأس المال إذا كان L =20 :

هذا يعني أن دالة الإنتاج الكلي تصبح بالشكل التالي: $Q = 40K$

- إيجاد الإنتاجية الحدية لرأس المال P_{MK} : نعلم أن $P_{MK} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}K}$

$$P_{MK} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}K} \Rightarrow P_{MK} = 40$$

- إيجاد الإنتاجية المتوسطة لرأس المال PM_K : نعلم أن $PM_K = \frac{Q}{K}$

$$PM_K = \frac{Q}{K} = \frac{40K}{K} \Rightarrow PM_K = 40$$

4. إيجاد المرونة الجزئية لكل من العمل ورأس المال عند النقطة (A):

- إيجاد المرونة الجزئية للعمل L : هذا يعني أن Q بدلالة L فقط ونعطي قيمة K = 10، وبالتالي تصبح $Q = 20L$ ، إذن بما أن L= 20 هذا يعني أن Q = 200 .

نعلم أن $E_L = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}L}.\frac{L}{Q} \Rightarrow E_L = 20.\frac{20}{200} = 1 \Rightarrow E_L = 1$

هذا يعني إذا زاد العمل ب 1٪ فإن الإنتاج الكلي سيزيد بنفس النسبة أي ب1٪.

- إيجاد المرونة الجزئية لرأس المال K : هذا يعني أن Q بدلالة K فقط ونعطي قيمة L = 20، وبالتالي تصبح $Q = 40K$ ، إذن بما أن K= 10 هذا يعني أن Q = 400 .

نعلم أن $E_K = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}K}.\frac{K}{Q} \Rightarrow E_K = 40.\frac{10}{400} = 1 \Rightarrow E_K = 1$

هذا يعني إذا زاد رأس المال ب 1٪ فإن الإنتاج الكلي سيزيد بنفس النسبة أي ب1٪.

5. إيجاد نسبة الزيادة في الإنتاج الكلي إذا زاد كل من العمل L ورأس المال K ب15 ٪ :

تصبح الدالة بالشكل التالي: $Q = 2(1.15L).(1.15K)$

$$Q = 2(1.32LK) = 2[LK + 0.32LK] = 2LK + 0.32(2LK) = 2Q + 0.32Q$$

من خلال ما سبق يمكن القول أن إذا زاد كل من العمل ورأس المال ب15٪ فإن الإنتاج الكلي سيزيد ب32٪.

حل التمرين الخامس :

لدينا دالة الإنتاج التالية : $Q = 3KL^2 - KL^3$

إذا كان $K = 10$ فان دالة الإنتاج تصبح كما يلي: $Q = 30L^2 - 10\ L^3$

1. حساب كمية العمل التي تضمن أقصى إنتاج:

نعلم أن الإنتاج الكلي PT يكون في أقصاه لما يكون الإنتاج الحدي يساوي الصفر $P_{ML} = 0$.

$$P_{ML} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}L} = 0 \Rightarrow 60L - 30L^2 = 0 \Longrightarrow L(60 - 30L) = 0 \Rightarrow$$ إما

$L = 0$ أو هذا مرفوض إقتصاديا $60 - 30L = 0 \Rightarrow L = {}^{60}/_{30} = 2 = L.$

إذن الكمية العمل التي تضمن أقصى إنتاج هي $L = 2$.

2. يبدأ الإنتاج الكلي يزداد بمعدل متناقص لما يكون الإنتاج الحدي في الذروة ، وحتى نجد عدد العمال في في هذه النقطة نستعمل العلاقة التالية: $P_{ML}` = 0$

$$P_{ML}` = 0 \Rightarrow \left(60L - 30L^2\right)` = 0 \Rightarrow 60 - 60L = 0 \Rightarrow L = \frac{60}{60} = 1.$$

إذن يبدأ الإنتاج الكلي يزداد بمعدل متناقص عند L=1.

3. تحديد مناطق الإنتاج الثلاث:

- نعلم أن المنطقة **الأولى** تبدأ من : L=0 ⟵ $PM_L = P_{ML}$ إلى

$$PM_L = \frac{Q}{L} = \frac{30\mathrm{L}^2 - 10\,\mathrm{L}3}{L} = 30L - 10L^2 = PM_L$$

$$PM_L = P_{ML} \Rightarrow 30L - 10L^2 = 60L - 30L^2 \Rightarrow 60L - 30L^2 - 30L + 10L^2 = 0 \Rightarrow$$

$$-20L^2 + 30L = 0 \Rightarrow L(-20L + 30) = 0 \Rightarrow$$ إما $\mathrm{L} = 0$ هذا مرفوض إقتصاديا

$$-20L + 30 = 0 \Rightarrow L = \frac{30}{20} = 1.5 = L$$ أو

المنطقة الأولى تبدأ من : L =0 ⟵ L=1.5

- المنطقة **الثانية** : تبدأ من: $PM_L = P_{ML}$ ⟵ $P_{ML} = 0$ (قمنا بحساب هذه النقطة س1).

L =1.5 ⟵ L =2

- *المنطقة **الثالثة** : من* $P_{ML} = 0$ ⟵ ∞

L = 2 ⟵ ∞