II. تحليل دالة الإنتاج في المدى الطويل:

1. دالة الإنتاج في المدى الطويل

يستطيع المنتج في هذه الحالة تغيير جميع عناصر الإنتاج بالزيادة أو بالنقصان،كما يستطيع تغيير مجال الإنتاج، حجمه وطريقته، ولكن قانون تناقص الإنتاج الحدي الذي رأيناه في دالة الإنتاج قصيرة المدى لا يكون ساري المفعول لأن جميع عناصر الإنتاج متغيرة في هذه الحالة، وتبين دالة الإنتاج في المدى الطويل العلاقة بين كمية عناصر الإنتاج وحجم الإنتاج الكلي.

ويمكن من خلال دالة الإنتاج في المدى الطويل حساب الإنتاج الحدي للعمل P_{ML} و الإنتاج الحدي لرأس المال $P_{\mathrm{M}K}$، كما يمكن حساب الإنتاج المتوسط للعمل $\boldsymbol{PM_L}$ ولرأس المال $\boldsymbol{PM_K}$ وذلك من خلال العلاقات التالية:

الإنتاج الحدي للعمل : $P_{\mathrm{ML}} = \frac{\Delta PT}{\Delta \mathrm{L}} = \frac{\partial PT}{\partial L}$

الإنتاج الحدي لرأس المال: $P_{\mathrm{M}K} = \frac{\Delta PT}{\Delta \mathrm{K}} = \frac{\partial PT}{\partial K}$

الإنتاج المتوسط للعمل: $PM_{\mathrm{L}} = \frac{PT}{L}$

الإنتاج المتوسط لرأس المال: $PM_{\mathbf{L}} = \frac{PT}{L}$

مثال: إذا كانت لديك دالة الإنتاج في المدى الطويل بالشكل التالي : $\mathrm{PT}= 2LK + K^2L^2$

فأوجد الإنتاج المتوسط للعمل و رأس المال الإنتاج الحدي للعمل ورأس المال؟

الحل:

إيجاد الإنتاج المتوسط للعمل ورأس المال:

الإنتاج المتوسط للعمل: $PM_{\mathrm{L}} = \frac{PT}{L} = \frac{2LK+K^2L^2}{L} = 2\mathrm{K} + \frac{K^2L^2}{L}$

الإنتاج المتوسط لرأس المال: $PM_{\mathrm{K}} = \frac{PT}{K} = \frac{2LK+K^2L^2}{K} = 2\mathrm{L} + \frac{K^2L^2}{K}$

إيجاد الإنتاج الحدي للعمل ولرأس المال:

الإنتاج الحدي للعمل : $P_{\mathrm{ML}} = \frac{\partial PT}{\partial L} = 2K + 2LK^2$

الإنتاج الحدي لرأس المال : $P_{\mathrm{MK}} = \frac{\partial PT}{\partial K} = 2L + 2KL^2$

من خلال المثال السابق نستنتج مايلي:

- إن الدالة السابقة تمثل دالة الإنتاج في المدى الطويل حيث أن جميع عناصر الإنتاج متغيرة، ونستطيع أن نحسب حجم الإنتاج الكلي عند معرفة عدد العمال **L** وعدد وحدات رأس المال **K** ، فإذا كان عدد العمال يساوي 2، وعدد وحدات رأس المال يساوي 2 عندها يكون الإنتاج الكلي يساوي 24

$$\mathrm{PT} = 2LK + K^2L^2 = 2 * 2 * 2 + 2^2 2^2 = 24$$

- إن الإنتاج الحدي والمتوسط لكل عنصر من عناصر الإنتاج يعتمد على الكمية المستخدمة من العنصر الآخر، هذا دليل على العلاقة التكاملية بين عناصر الإنتاج.

2. قانون غلة الحجم:

يتغير الإنتاج الكلي عندما تتغير عناصر الإنتاج لكن ليس بالضرورة بنفس النسبة، إن نسبة الزيادة في الإنتاج نتيجة لزيادة عناصر الإنتاج تعتمد على دالة الإنتاج نفسها، ويمكن إيجاد ثلاث حالات:

- **حالة تزايد غلة الحجم:**

تكون فيها نسبة التغير في عناصر الإنتاج أقل من نسبة التغير في الإنتاج الكلي، وهذا يؤدي إلى انخفاض تكلفة الوحدة الواحدة من الإنتاج ويزيد من فائض المنتج، فعلى سبيل المثال إذا كانت دالة الإنتاج بالشكل التالي: PT=LK ، وزادت عناصر الإنتاج ب5٪ لكل عنصر فإن الإنتاج الكلي PT سيزيد بنسبة أكبر من 5٪ ، ولشرح ذلك نقول أن زيادة L و Kب 5٪ أي يصبح في الدالةL 1.05 و K 1.05 نتيجة هذه الزيادة وبالتالي تصبح الدالة بالشكل :

$$\mathrm{PT}=(1.05\mathrm{L})(1.05\mathrm{K})= 1.1025\mathrm{LK}=\mathrm{PT}+0.1025\mathrm{PT} \Rightarrow \Delta PT = 10.25\%$$

من خلال ما سبق نقول أن الزيادة في عناصر الإنتاج ب5٪ أدى إلى زيادة الإنتاج الكلي ب 10.25٪.

➢ **حالة ثبات غلة الحجم :**

في هذه الحالة تكون نسبة التغير في عناصر الإنتاج تساوي تماما نسبة التغير في الإنتاج الكلي، فإذا زادت عناصر الإنتاج مثلا ب5٪ فإن الإنتاج الكلي سيزيد بنفس النسبة، ومثال ذلك الدالة التالية: $PT=L^{0.5}K^{0.5}$.

ولشرح ذلك نقول أن زيادة L و Kب 5٪ تصبح المتغيرات في الدالة: 1.05 L و1.05 K نتيجة هذه الزيادة وبالتالي تصبح الدالة بالشكل : $PT=(1.05L)^{0.5}(1.05K)^{0.5}$

$$\Rightarrow 1.05^{0.5}L^{0.5}1.05^{0.5}K^{0.5} = L^{0.5}K^{0.5}1.05^{0.5+0.5} = L^{0.5}K^{0.5}1.05^{1} = 1.05.PT$$
$$\Rightarrow \Delta PT = 5\%$$

من خلال ماسبق نقول أن زيادة في عناصر الإنتاج ب5٪ أدى إلى زيادة الإنتاج الكلي بنفس النسبة وهذا ما يسمى ثبات غلة الحجم.

➢ **حالة تناقص غلة الحجم :**

تكون فيها نسبة التغير في عناصر الإنتاج أكبر من نسبة التغير في الإنتاج الكلي، وهذا يؤدي إلى ارتفاع تكلفة الوحدة الواحدة من الإنتاج فيقلل من فائض المنتج، أي إذا زادت عناصر الإنتاج بنسبة 5٪ فإن الإنتاج الكلي سيزيد بنسبة أقل من 5٪، مثال ذلك الدالة التالية : $PT=L^{0.25}K^{0.25}$.

بنفس طريقة المثال أعلاه يمكن إيجاد نسبة التغير في الإنتاج الكلي PT ب 2.4٪ نتيجة تغير عناصر الإنتاج ب5٪ .

3. توازن المنتج

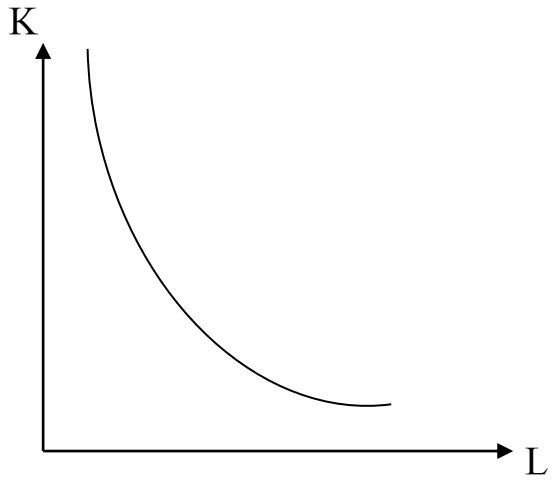
إن هدف المنتج هو تعظيم الإنتاج أو تقليل التكاليف فيختار تعظيم الإنتاج عندما يكون مقيد بالميزانية أي له مبلغ محدد يستثمره في هذه العملية، ويختار تدنيت التكاليف عندما يكون مقيد بالإنتاج مثل الطلبية فلا يمكنه إنتاج كمية تفوق هذه الطلبية، وعليه (المنتج) المفاضلة بين توليفات متعددة من عناصر الإنتاج المتاحة بهدف إنتاج سلعة معينة وذلك في إطار تحقيق أقصى ربح ممكن من هذه السلعة ، ويمكن إيجاد توازن المنتج بطريقتين:

1.3. توازن المنتج بيانيا:

يمكن إيجاد توازن المنتج بيانيا من خلال تقاطع منحنى الناتج المتساوي مع منحنى خط التكاليف المتساوية ، وتسمى نقطة تقاطع المنحنيين بنقطة التوازن.

1.1.3. منحنى الناتج المتساوي:

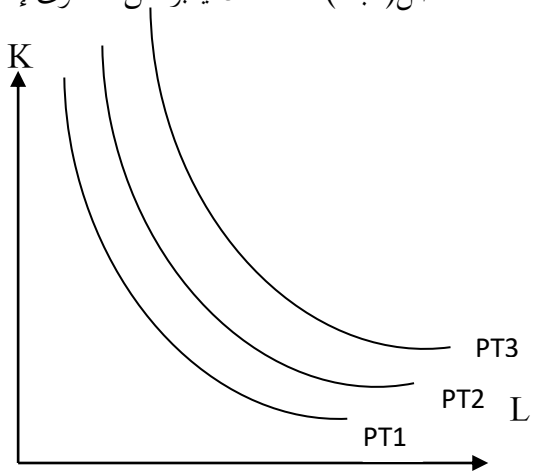
- **تعريفه:** يمثل المحل الهندسي (الرسم البياني) لمجموعة مختلفة من الإحداثيات لعنصر العمل ورأس المال (K ،L)، التي تسمح للمنتج بالحصول على نفس المستوى من الإنتاج، كما أن منحنى الناتج المتساوي له نفس خصائص منحنيات السواء في نظرية المستهلك.



منحنى الناتج المتساوي

- **خرائط الناتج المتساوي:**

تمثل مستويات مختلفة من الإنتاج عند الزيادة في حجم إستخدام عوامل الإنتاج حيث كلما ابتعد منحنى الناتج المتساوي عن نقطة الأصل(المبدأ)كلما كان يعبر عن مستوى إنتاجي أكبر



خرائط الناتج المتساوي

- **المعدل الحدي للإحلال الفني($TMST_{L,k}$) :**

هو ذلك المعدل الذي يسمح للمنتج بالتنازل عن عدد من وحدات أحد عناصر الإنتاج لتحل محلها وحدة واحدة من العنصر الآخر وذلك من أجل المحافظة على نفس مستوى الإنتاج، حيث يتم تقدير المعدل الحدي للإحلال الفني لعنصر العمل محل رأس المال وفق العلاقة التالية:

$$TMST_{L,K} = \frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{-P_{ml}}{P_{mk}} = \frac{-P_l}{P_k}$$

مثال : لتكن لديك التوليفات المختلفة لعناصر الإنتاج المبينة في الجدول الآتي، المطلوب حساب المعدل الحدي للإحلال الفني $TMST_{L,K}$؟

الحالة	العمل **L**	رأس المال **K**
A	3	12
B	4	8
C	5	6.3

الحل:

يمكن حساب المعدل الحدي للإحلال الغني $TMST_{L,K}$ بتطبيق العلاقة التالية:

$$TMST_{L,K} = \frac{\Delta K}{\Delta L}$$

الحالة **A**: غير ممكنة التقدير لعدم معرفة التوليفة المراد إحلالها.

الحالة $\frac{8-12}{4-3}$ **B** $TMST_{L,K} = \frac{\Delta K}{\Delta L} =$ =-4

هذا يعني أن المنتج يمكنه التنازل عن 4 وحدات من رأس المالK ويضيف وحدة واحدة من العمل L ويبقى في نفس مستوى الإنتاج.

الحالة C: $TMST_{L,K} = \frac{6.3-8}{5-4} = -1.7$

هذا يعني أن المنتج يمكنه التنازل عن 1.7 وحدات من رأس المال K ويضيف وحدة واحدة من العمل L ويبقى في نفس مستوى الإنتاج.

2.1.3. خط التكاليف المتساوية:

يمثل التوافيق المختلفة من عوامل الإنتاج التي يمكن للمنتج شرائها بنفس التكلفة الكلية، ويُمَكِن خط التكاليف المتساوية من مقارنة الموارد المالية المتاحة المتمثلة في الميزانية المخصصة للإنتاج والأسعار السائدة في السوق لعوامل الإنتاج التي يتم التعبير عنها وفق العلاقة التالية:

$$CT = L P_L + K P_K$$

بحيث :

CT: التكلفة الكلية.

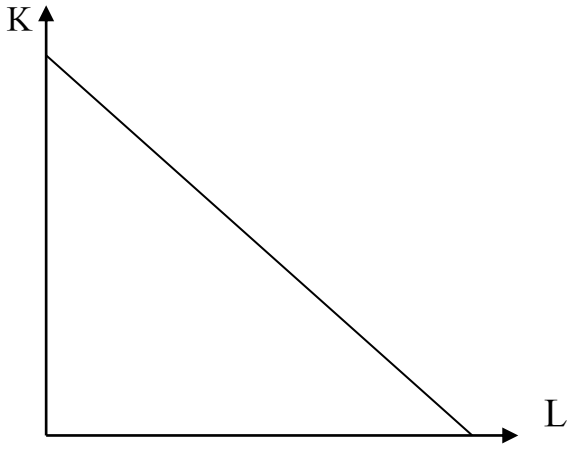
P_L و P_K تمثلان سعر العمل L وسعر رأس المال K على التوالي.

و يمكن كتابة معادلة خط التكاليف المتساوية بالشكل التالي (هو استخراج K بدلالة L من معادلة التكاليف الكلية):

معادلة خط التكاليف المتساوية

$$K = \frac{CT}{P_K} - \frac{P_L}{P_K}L$$

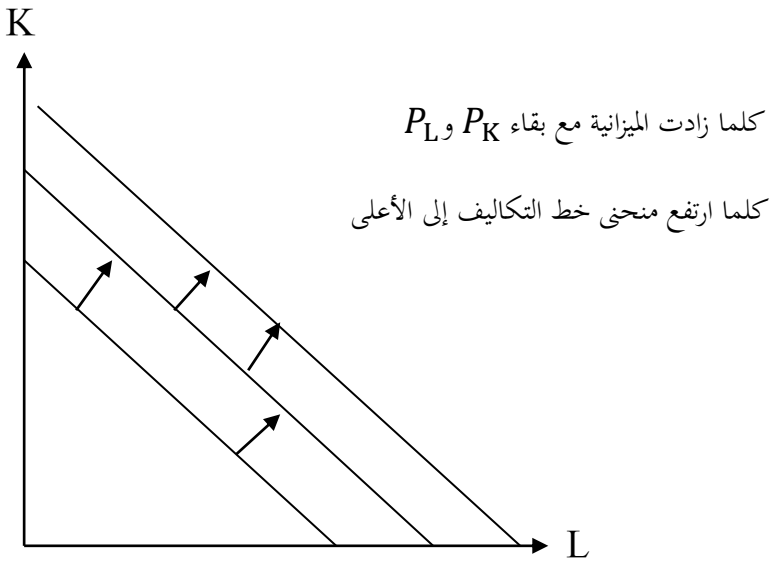
وشكلها البياني يكون كالآتي:



منحنى خط التكاليف المتساوي

نلاحظ من خلال المعادلة أن ميل خط التكاليف سالب($-\frac{P_L}{P_K}$) هذا يعني لإستخدام مقدار أكبر من رأس المال K يجب التخلي عن قسم من عنصر العمل L .

لكن ماذا يحدث لخط التكاليف المتساوية فيما إذا لو ارتفعت ميزانية المنتج مع بقاء أسعار العمل ورأس المال ثابتة؟ إن ذلك سيؤدي إلى رفع خط التكاليف المتساوية بالتوازي مع وضعه السابق، ويرتفع عنه بمقدار يعادل مقدار الزيادة في الميزانية مشيرا بذلك إلى شراء كمية أكبر من رأس المال K وإستخدام أكبر من العمال L، والشكل أدناه يوضح ذلك:



مثال: بالرجوع إلى المثال السابق واستعمال توليفات عوامل الإنتاج المتمثلة في الإحداثيات A(3, 12) ، B(4 , 8) ، C(5 , 6,3) ، كما أن الميزانية المخصصة لإنتاج السلعة تقدر ب80 وحدة نقدية، بينما أسعار العمل ورأس المال $P_L = 10$ و $P_K = 5$.

المطلوب : – أرسم منحنى الناتج المتساوي لتوليفات عوامل الإنتاج السلعة ؟

- كتابة معادلة خط التكاليف، مع تمثيلها بيانيا في نفس معلم الناتج المتساوي؟
- تحديد توليفة عوامل الإنتاج التي تحقق أعظم مستوى إنتاج من السلعة؟

الحل:

- يمكن رسم منحنى الناتج المتساوي من خلال إحداثيات النقاط A ,B, C التي تمثل لنا جدول مساعد لرسمه.

الحالة	العمل **L**	رأس المال **K**
A	3	12
B	4	8
C	5	6.3

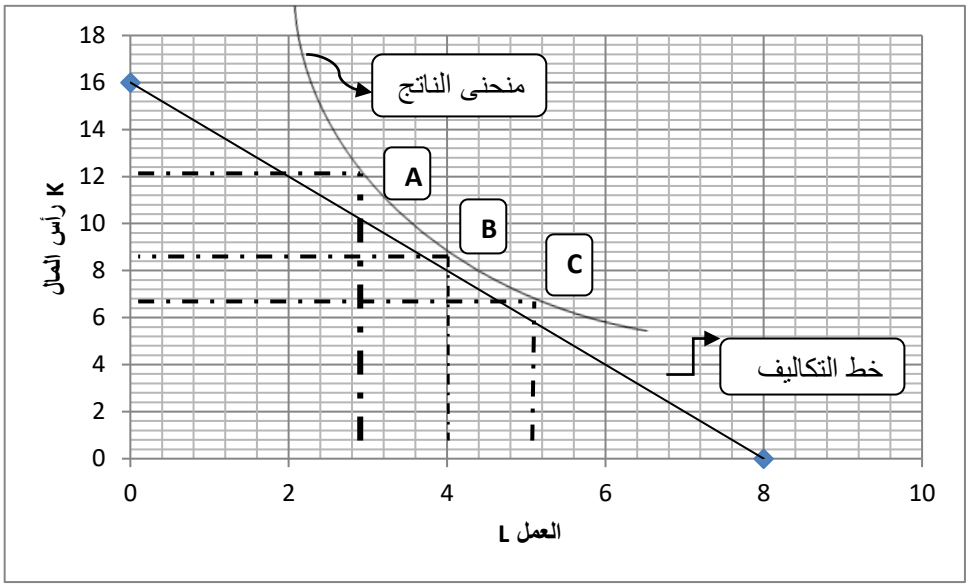
- كتابة معادلة خط التكاليف: هو استخراج K بدلالة L من معادلة التكاليف الكلية CT

لدينا: $CT = LP_L + KP_K \Rightarrow 80 = 10L + 5K \Rightarrow K = \frac{80-10L}{5}$

$$\Rightarrow K = 16 - 2L$$

لرسم هذه المعادلة يمكننا الاستعانة بالجدول المساعد، وبما أنها دالة خطية فإن نقطتين كافيتين لرسمه.

L	0	8
K	16	0



نلاحظ من خلال الشكل أعلاه أن منحنى الناتج المتساوي يمس خط التكاليف في النقطة B عند الإحداثية (K=8، L=4) وهي الكمية التي تحقق التوازن للمنتج وتحقق له أعظم إنتاج.