Chapitre 10
Flexion composée

10.1. Définition

Une section est soumise à la flexion composée (Figure 10.1) quand l'ensemble des forces situées à gauche d'une section quelconque $SS^{/}$ (ou à droite) se réduisent à:

- Un Moment de flexion M.
- Un effort Normal N (N peut être de compression ou de traction).
- Eventuellement un effort Tranchant T.

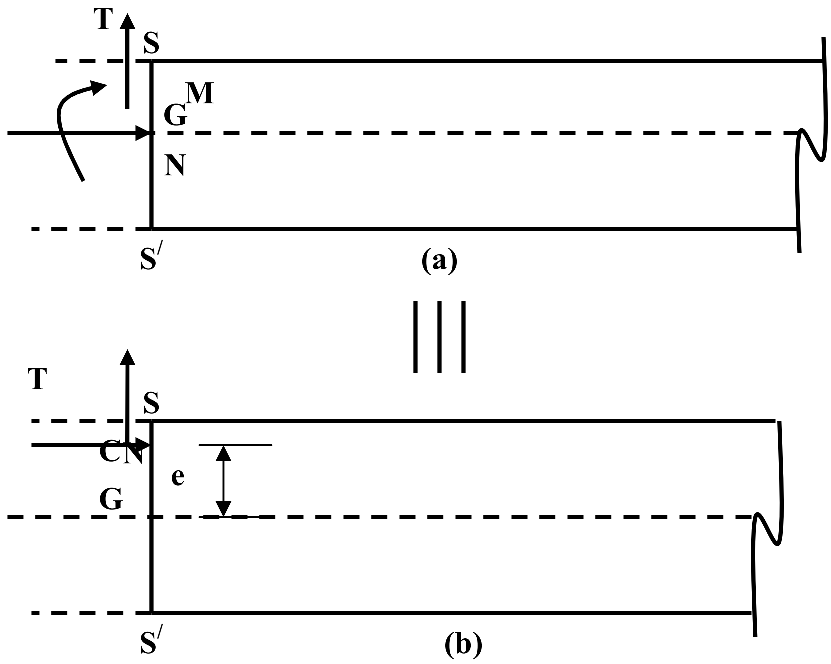


Figure 10.1 : Section soumise à la flexion composée

* L'effet de l'effort tranchant est étudié séparément comme étudié au chapitre précédent

* L'effet combiné de Met de N est une **Flexion Composée**.

Une section soumise a un effet combiné (N,M) appliqué au centre de gravité G est équivalente à la même section soumise à un effort normal N exécuté, appliqué au **centre de pression C** (Figure 10.2). Ce centre de pression étant définit par une excentricité $e_0 = M /N$ par rapport au centre d gravité G et est très important à définir dans le sens où il influe sur la valeur de M [13].

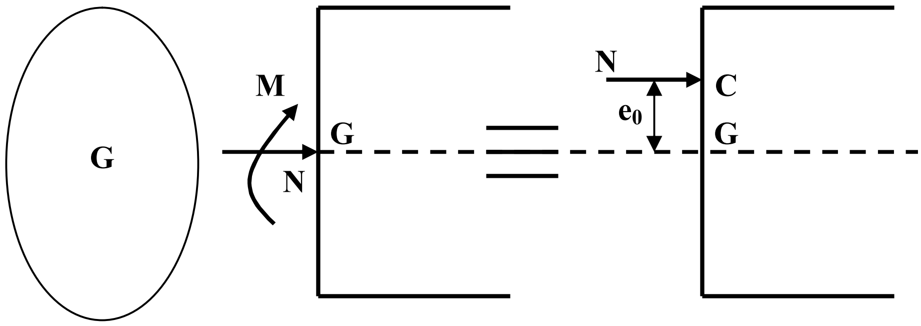


Figure 10.2 : Section soumise à la flexion composée- effort excentré

Etudier un élément sous l'effet combiné (N,M) est alors équivalent à étudier le même élément sous **l'effet excentré de N** (N appliqué au centre de C). La position du centre de pression C varie avec le signe de M et de N, quatre cas sont possibles et sont donnés à la Figure 10.3 ci-dessous [13]:

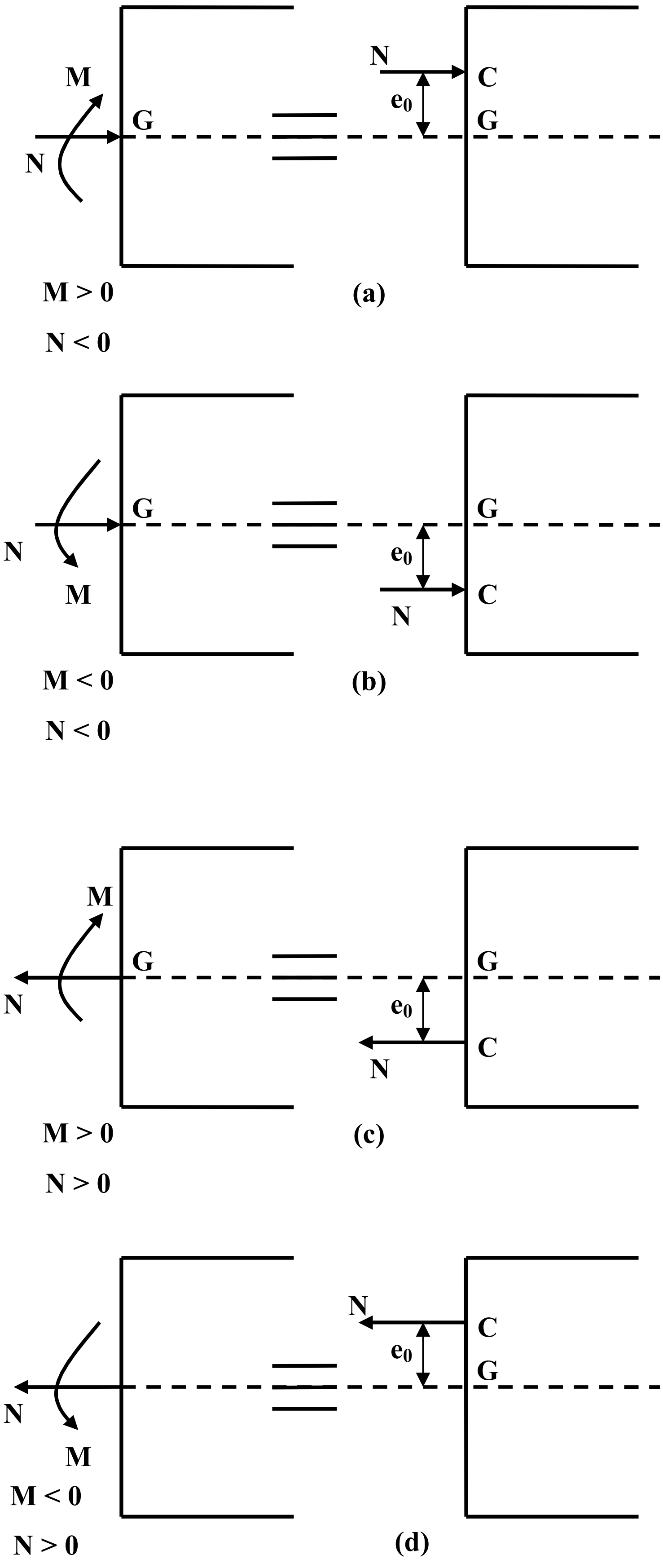


Figure 10.3 : Différents cas de position du centre de pression C

Il faut noter toutefois, que le centre de pression peut être situé en dehors de la section ($e_0 > h/2$).

10.2. Calcul des sections en flexion composée analytiquement

10.2.1. Sections entièrement tendues

a- Calcul à l'ELU

Les sollicitations de flexion composée avec traction se calculent à l'E.L.U comme:

$$\begin{aligned} N_u &= \sum \gamma_i . N_i \\ M_u &= \sum \gamma_j . M_j \end{aligned} \qquad (10.1)$$

Les indices i et j signifiant que les efforts normaux et les moments fléchissant peuvent provenir d'actions de natures différentes.

Une section soumise à une flexion composée (N_u ; M_u) ou excentriquement chargée par un effort normal N_u est entièrement tendue si:

- N_u est un effort normal de traction
- Le centre de pression C défini par $e_0 = M_u / N_u$ se trouve entre les 2 nappes d'armatures (nappe du haut et nappe du bas).

Le béton tendu étant négligé, l'effort extérieur excentrique est équilibré uniquement par les armatures comme dans la Figure 10.4 ci-dessous.

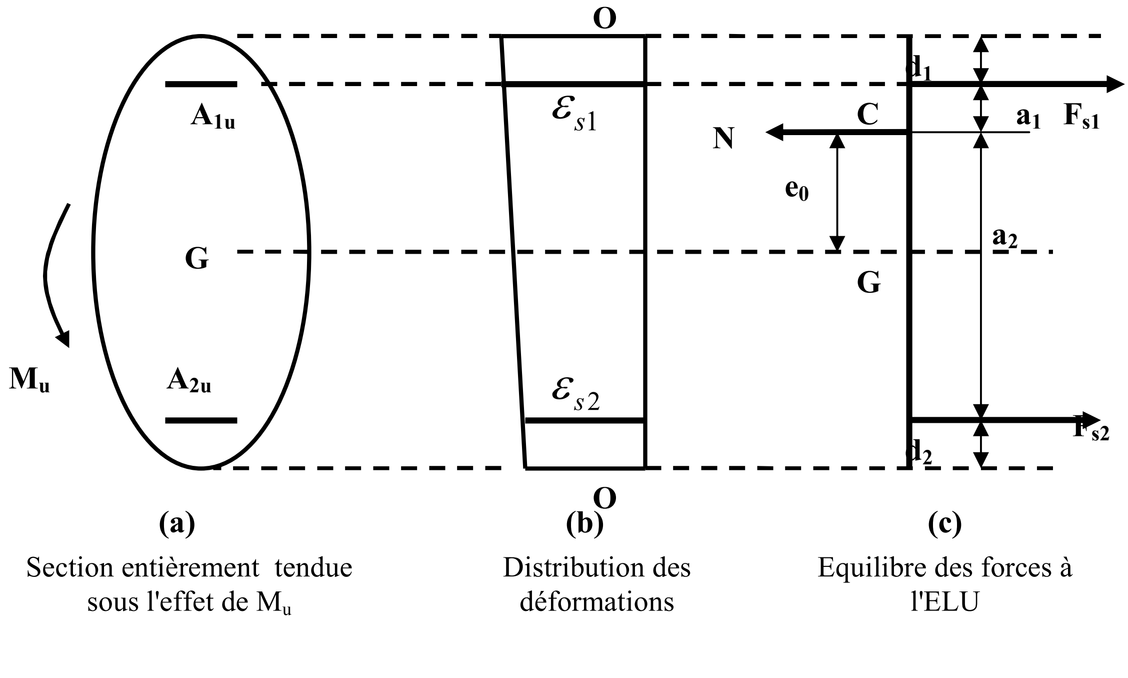


Figure 10.4 : Distribution des déformations et des forces à l'ELU dans une section soumise à la flexion composée

Pour des raisons d'économie, le section étant entièrement tendue, on fait travailler les deux nappes d'acier à leur résistance normale f_e/γ_s.

Soit : $\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = f_e/\gamma_s$

On peut alors écrire que:

$$F_{s1} = \sigma_{s1}.A_{1u} = A_{1u}.\frac{f_e}{\gamma_s}$$
$$F_{s2} = \sigma_{s2}.A_{2u} = A_{2u}.\frac{f_e}{\gamma_s} \qquad (10.2)$$

La section étant en équilibre, on écrit que le moment par rapport à n'importe quel point est nul, en particulier par rapport à une des nappes d'acier, on obtient:

$$F_{s1}.(a_1 + a_2) - N_u.a_2 = 0 \Rightarrow A_{1u}.\frac{f_e}{\gamma_s}.(a_1 + a_2) = N_u.a_2 \qquad (10.3)$$

$$\boxed{A_{1u} = \frac{N_u.a_2}{(a_1 + a_2).\frac{f_e}{\gamma_s}}} \qquad (10.4)$$

De la même façon, on peut écrire que:

$$F_{s2}.(a_1 + a_2) - N_u.a_1 = 0 \Rightarrow A_{2u}.\frac{f_e}{\gamma_s}.(a_1 + a_2) = N_u.a_1 \qquad (10.5)$$

$$\boxed{A_{2u} = \frac{N_u.a_1}{(a_1 + a_2).\frac{f_e}{\gamma_s}}} \qquad (10.6)$$

b- Calcul à l'ELS

Les sollicitations de flexion composée avec traction se calculent à l'E.L.S comme:

$$N_{ser} = \sum N_i$$
$$M_{ser} = \sum M_i \qquad (10.7)$$

Une section soumise à une flexion composée (N_{ser} ; M_{ser}) ou excentriquement chargée par un effort normal N_{ser} entièrement tendue si:

- N_{ser} est un effort de traction.
- Le centre de pression C défini par $e_0 = M_{ser}/N_{ser}$ se trouve entre les 2 nappes d'armatures.

Puisque le béton tendu est aussi négligé à l'E.L.S, l'effort extérieur N_{ser} est équilibré uniquement par les efforts élastiques dans les aciers tendus (A_{1ser} et A_{2ser}) comme le montre la Figure 10.5.

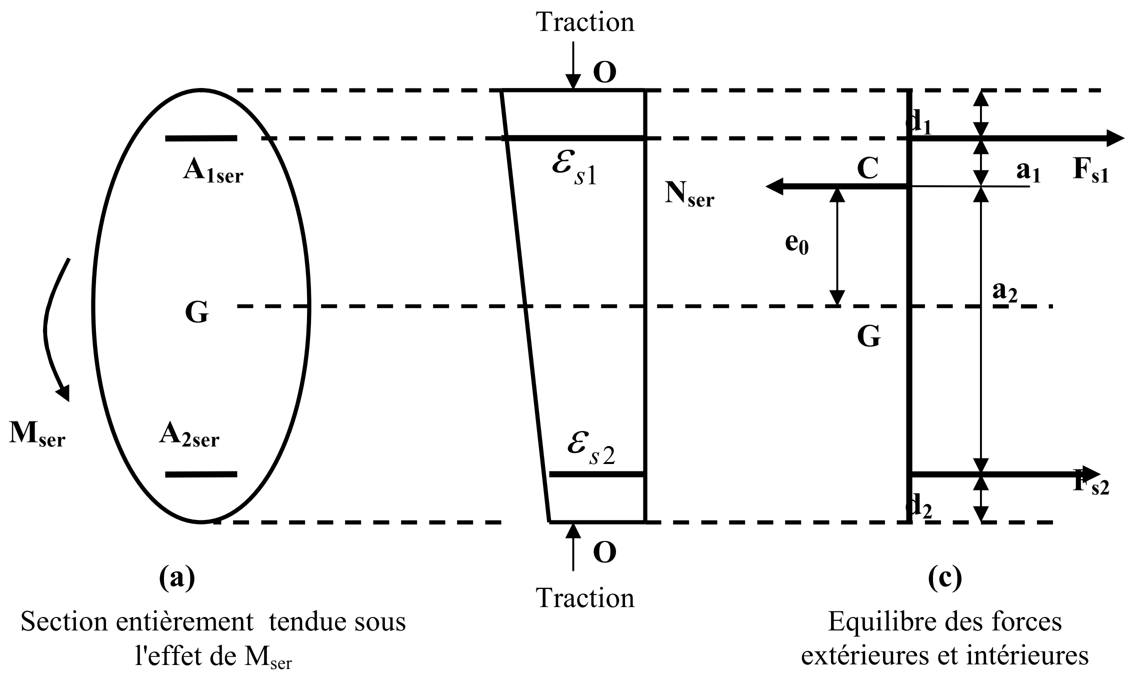


Figure 10.5 : Distribution des déformations et des forces à l'ELS dans une section soumise à la flexion composée

Pour des raisons d'économie, on fait travailler les aciers à leurs contraintes maximales tolérées à l'E.L.S, soit σ_s^-, donc on aura:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = \bar{\sigma}_s \\
&F_{s1} = A_{1ser}.\sigma_1 = A_{1ser}.\bar{\sigma}_s \qquad (10.8) \\
&F_{s2} = A_{2ser}.\sigma_2 = A_{2ser}.\bar{\sigma}_s
\end{aligned}
$$

On écrit que le moment par rapport à une des nappes est nul puisque la section est en équilibre:

$$F_{s1}.(a_1 + a_2) = N_{ser}.a_2 \Rightarrow A_{1ser}.\bar{\sigma}_s.(a_1 + a_2) = N_{ser}.a_2 \qquad (10.9)$$

$$\boxed{A_{1ser} = \frac{N_{ser}.a_2}{(a_1 + a_2).\bar{\sigma}_s}} \qquad (10.10)$$

Pour un raisonnement analogue, on trouve:

$$\boxed{A_{2ser} = \frac{N_{ser}.a_1}{(a_1 + a_2)\bar{\sigma}_s}} \qquad (10.11)$$

10.2.2. Sections partiellement comprimées

Pour qu'une section soit partiellement comprimée, il faut que:

- Si N est un effort de traction, alors son point d'application, qui n'est autre que le centre de pression C défini par e_0 = M /N, doit être situé en dehors des deux nappes d'acier; comme dans la Figure 10.6 ci-dessous.

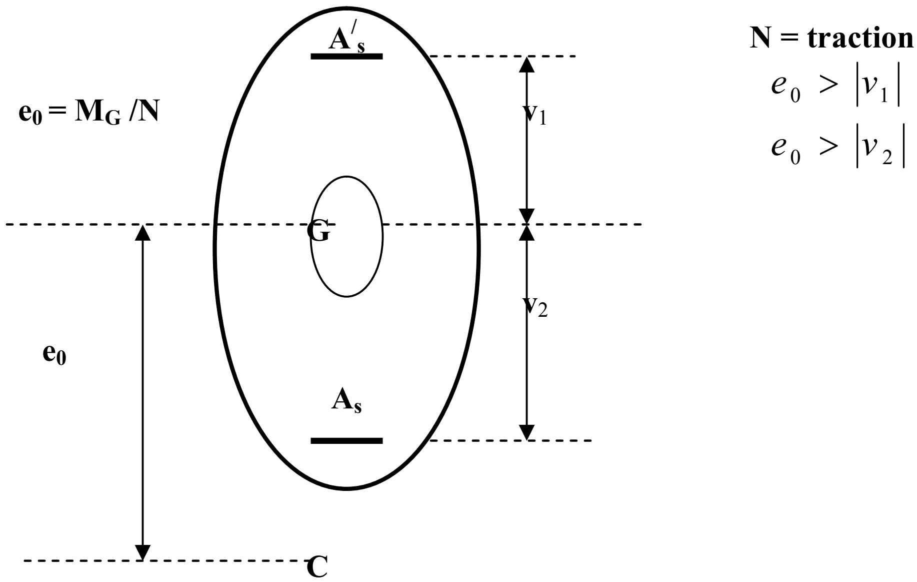


Figure 10.6: Section partiellement comprimée avec effort normal de traction

- Si **N est un effort de compression,** alors il faut que l'axe neutre soit localisé entre les deux nappes d'acier pour qu'au moins l'une des deux nappes soit tendue: y < d ou α < 1.

Pour que ceci soit possible, il faut que le point d'application de N, c'est-à-dire le centre de pression C défini par $e_0 = M_G$ /N, soit localisé en dehors du noyau central d la section comme dans la Figure 10.7 ci-dessous.

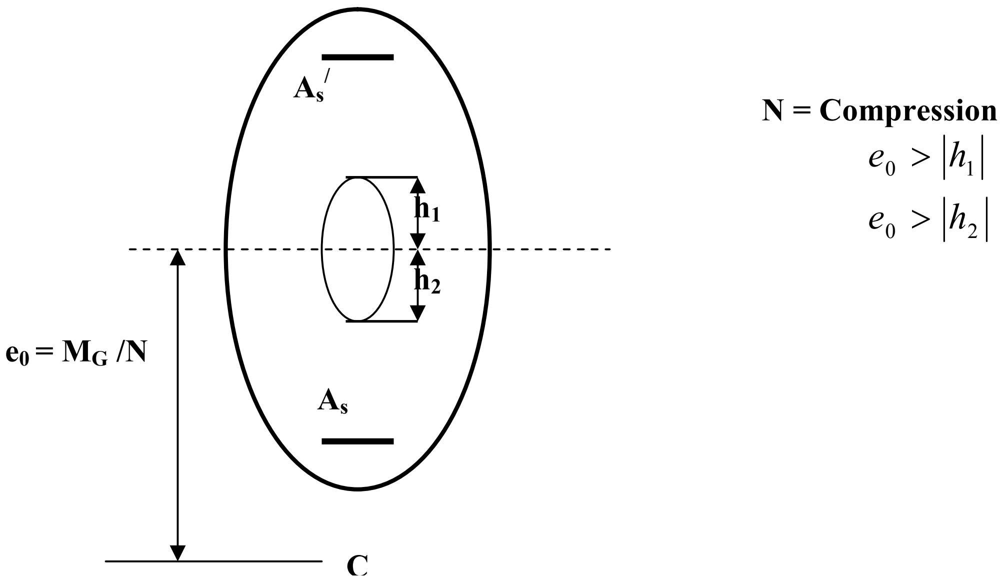


Figure 10.7: Section partiellement comprimée avec effort normal de compression

Pour une section rectangulaire, elle est partiellement comprimée quand $e_0 > h/6$.

a- Théorie du moment fictif

Considérons une section partiellement comprimée, avec N un effort de compression excentré de e_0 par rapport à G (Figure 10.8).

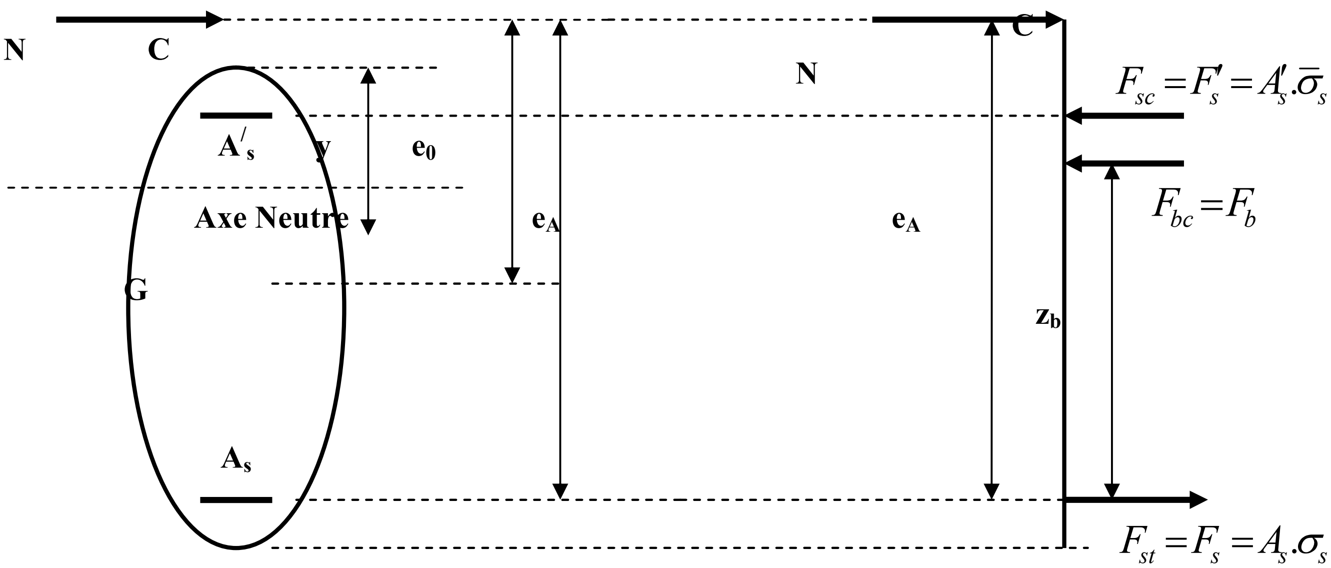


Figure 10.8: Section partiellement comprimée avec effort de compression excentré

La section étant en équilibre, le moment des forces extérieures calculé par rapport à n'importe quel point doit être égal au moment des forces intérieures calculé par rapport à ce point.
Aussi la résultante des forces extérieures doit être égal à la résultante des forces intérieures.
En considérant l'équilibre des moments par rapport au centre de gravité des aciers tendus, on obtient:

$$\begin{cases} M_A = N.e_A = F'_b.z_b + F'_s.z_s \\ N = F'_b + F'_s - F_s = F'_b + A'.\sigma'_s - A_s.\sigma_s \end{cases} \qquad (10.12)$$

Ou encore:

$$\begin{cases} F'_b.z_b + F'_s.z_s - N.e_A = 0 \\ F'_b + A'.\sigma'_s - A_s.\sigma_s - N = 0 \end{cases} \qquad (10.13)$$

Cette dernière équation peut se mètre sous la forme:

$$F'_b + A'_s.\sigma'_s - \sigma_s.\left(A + \frac{N}{\sigma_s} \right) = 0 \qquad (10.14)$$

Considérons maintenant la même section soumise en flexion simple à un moment $\mathbf{M_f} = \mathbf{N.e_A}$ (Figures 10.9 et 10.10) et déterminons les armatures A_s et A'_s de cette section pour que les contraintes et donc les déformations soient les mêmes que dans le cas où la section est soumise à (N ; $M_G = N.e_0$). Les équations d'équilibre de cette section sous l'effet de $\mathbf{M_f} = \mathbf{N.e_A}$

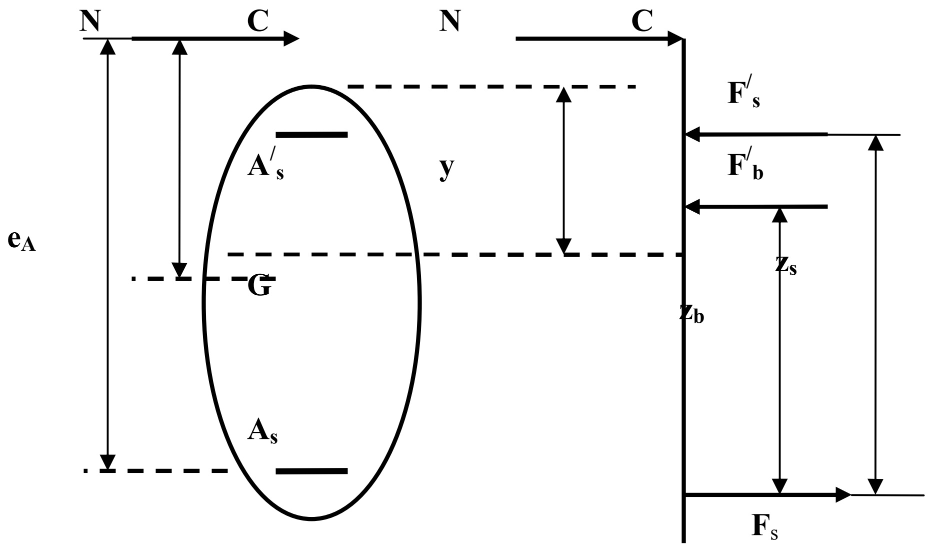
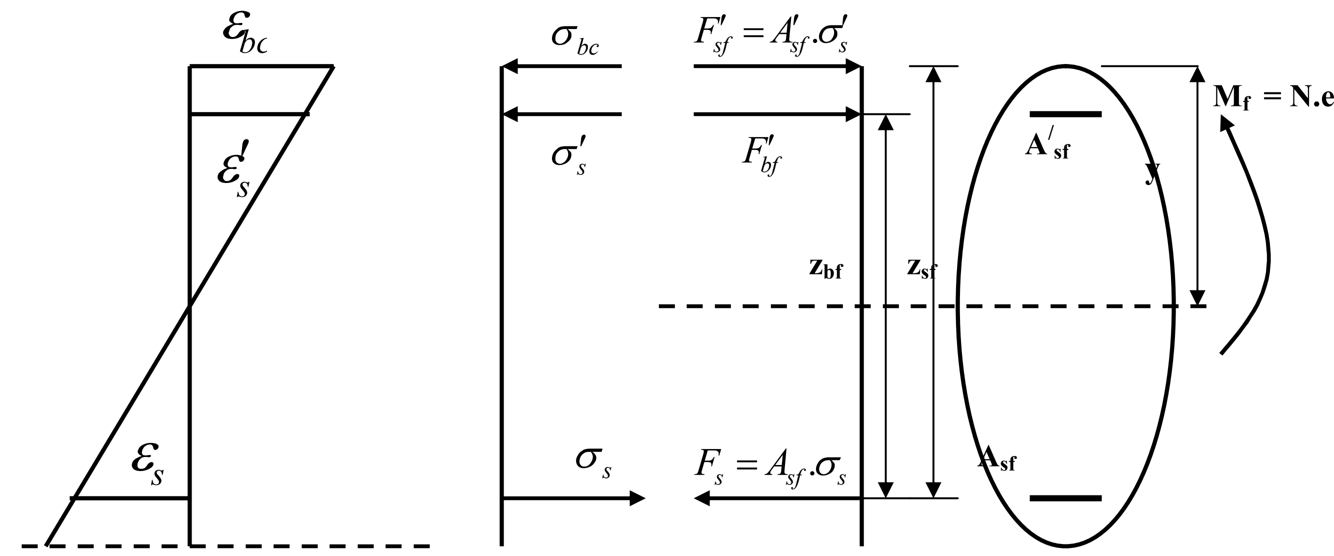


Figure 10.9 : Section sous Flexion Composée (N , $M_G = N.e_A$)



Même contraintes et déformations dans les deux sections

Section sous Flexion Simple $M_f = N.e_A$

Figure 10.10 : Contraintes et déformations dans une section partiellement comprimée

$$\begin{cases} M_f = N.e_A = F'_{bf}.z_{bf} + F'_s.z_{sf} \\ F'_{bf} + F'_s - F_s = 0 \end{cases} \qquad (10.15)$$

Ou encore:

$$\begin{cases} F'_{bf}.z_{bf} + F'_s.z_{sf} - N.e_A = 0 \\ F'_s + A'_{sf}.\sigma'_s - A_{sf}.\sigma_s = 0 \end{cases} \qquad (10.16)$$

Les deux sections étant soumises aux mêmes contraintes et donc aux mêmes déformations;

- La profondeur de l'axe neutre y est la même pour les deux sections; $F'_b = F'_{bf}$
- σ'_s est la même pour les deux sections.
- σ_s est la même pour les deux sections.
- $z_b = z_{bf}$; $z_s = z_{sf}$

Flexion Simple

Forces:

$$F'_b + A'_s.\sigma_s - \sigma_s.\left(A_s + \frac{N}{\sigma_s}\right) = 0 \qquad (10.17)$$

Moments:

$$F'_b.z_b + F'_s.z_s - N.e_A = 0 \qquad (10.18)$$

Flexion Composée

$$F'_{bf}+A'_{sf}.\sigma'_s-A_{sf}.\sigma_s=0 \qquad (10.19)$$

$$F'_{bf}.z_{bf}+F'_{sf}.z_{sf}-N.e_A=0 \qquad (10.20)$$

Par identification des termes, on obtient:

$$(12.20)\Rightarrow F'_s.z_s=F'_{sf}.z_{sf} \qquad (10.21)$$

Puisque $z_s = z_{sf}$ alors:

$$F'_s=F'_{sf}\Rightarrow A'_s.\sigma'_s=A'_{sf}.\sigma' \qquad (10.22)$$

$$\boxed{A'_s=A'_{sf}} \qquad (10.23)$$

$$A_s+\frac{N}{\sigma_s}=A_{sf} \qquad (12.24$$

$$\boxed{A_s=A_{sf}-\frac{N}{\sigma_s}} \qquad (10.25)$$

Remarque

Dans les équations d'équilibres des forces, l'effort extérieur N était considéré compressif donc du même signe que F'_b et F'_s. Si N était un effort de traction on aurait trouvé:

$$\boxed{A_s=A_{sf}+\frac{N}{\sigma_s}} \qquad (10.26)$$

Conclusion

Pour calculer une section en béton armé sous l'effet d'une flexion composée, particulièrement comprimée, on calcule la même section en flexion simple soumise à un moment fictif

$\mathbf{M_f = N.e_A}$ et qui sera armée de $\mathbf{A'_{sf}}$ et $\mathbf{A'_{sf}}$ telles que:

$$\boxed{A'_s=A'_{sf}} \qquad \boxed{A_s=A_{sf}+\frac{N}{\sigma_s}}$$

N étant pris avec son signe N > 0 : Traction ; N < 0 : Compression.

b- Calcul à l'ELS

La section se trouve partiellement comprimée à l'E.L.S si:

<u>1er Cas</u> : N_{ser} = traction, alors le point d'application C, défini par $e_0 = M_{ser} / N_{ser}$ par rapport à G, centre de gravité de la section, est dehors de deux nappes d'acier.

<u>2ème Cas</u>: N_{ser} = Compression, alors l'axe neutre doit être situé entre les 2 nappes d'acier

($y_{ser} < d$) ou encore que le point d'application C de l'effort normal N_{ser} est a l'extérieur du noyau central:

($e_0 = M_{ser} / N > |h/6|$ pour une section rectangulaire).

On calcule la section en flexion simple sous l'effet du Moment fictif $M_{fser} = N_{ser}.e_A$, ainsi on obtient A'_{fser} et A_{fser} ensuite on détermine les quantités d'acier en flexion composée comme:

$$A_{ser} = A_{fser} + \frac{N_{ser}}{\sigma_s}$$

$$A'_{ser} = A'_{fser}$$

Avec $N_{ser} > 0$: Traction

$N_{ser} < 0$: Compression.

Remarque

Pour la détermination de A'_{fser} on doit comparer $M_{fser} = N_{ser}.e_A$ à M_{rb} et non M_{ser} à M_{rs}.

c- <u>Calcul à l'E.L.U</u>

La section se trouve partiellement comprimée à l'E.L.U si:

<u>1er Cas</u>: -N_u = Traction, alors le centre de poussée C, défini par $e_0 = M_u / N_u$ par rapport à G est en dehors des deux nappes d'acier.

<u>2ème Cas</u>:- N_u = Compression, alors l'axe neutre doit être situé entre les deux nappes d'acier ($y_d < d$); ou encore que le point d'application C de l'effort normal N_u est à l'extérieur du noyau central ($e_0 = M_u / N_u > |h/6|$ pour une section rectangulaire).

Pour une **section rectangulaire:** l'axe neutre entre les deux nappes d'acier; $y = \alpha.d \leq d$.

Or à l'E.L.U; on peut écrire pour le moment interne $\Rightarrow \alpha \leq 1$

(Voire chapitre sur flexion simple). $\mu_{bu} = 0.8\alpha.(1-0.4\alpha)$

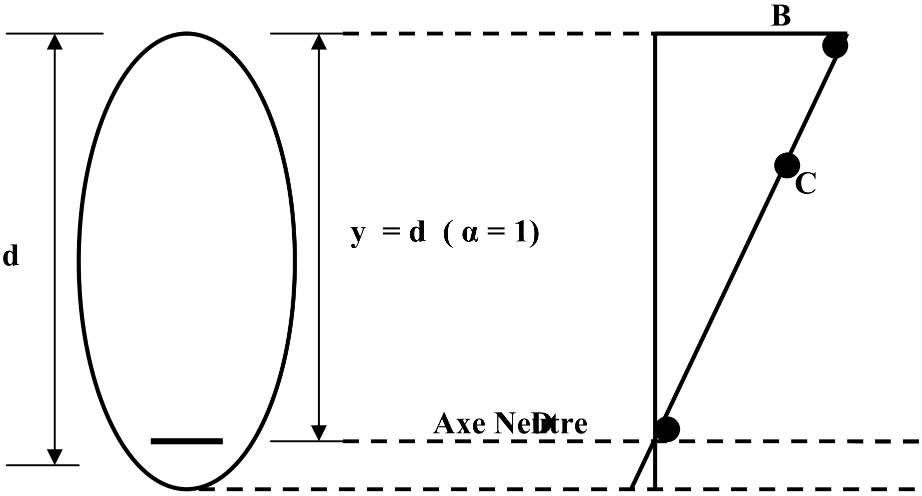


Figure 10.11 : Position de l'axe neutre

$$\alpha = 1 \Rightarrow \mu_{bu} = \mu_{BD} = 0.8*1.(1-0,4) = 0.48 \qquad (10.27)$$

$$M_{BD} = \mu_{BD}.b_0.d^2.f_{bu} = 0.48.b_0.d^2.f_{bu} \qquad (10.28)$$

C'est le moment maximum du béton comprimé quand l'axe neutre passe par le centre de gravité des aciers tenus.

En flexion composée, ce moment de résistance interne, qui est calculé par rapport au centre de gravité des aciers tendus, équilibre un moment externe $M_{uA} = N_u.e_A$; le point par rapport auquel le moment est calculé étant important en flexion composée.

L'axe neutre, défini par y, sera toujours entre les deux nappes (y <d) si :

$M_{uA} < M_{BD} = 0,48.b_0.d^2.f_{bu}$

Remarque

Lorsque une section est partiellement comprimée avec N_u = compression, alors il faut tenir compte des effets du second ordre (flambement) et donc vérifier l'état limite de stabilité de forme en adaptant une excentricité totale de calcul telle que $\mathbf{e_t = e_0 + e_a + e_2}$

Pour cela, des méthodes spéciales traitant le flambement doivent être considérées (méthodes du moment additionnel).

Cependant, le règlement BAEL [2] permet de tenir compte des effets du flambement d'une manière forfaitaire lorsque le rapport l_f /h ≤ max (15 ; 20.e_0 /h) c'est-à-dire lorsque la pièce n'est pas trop élancée, avec:

l_f = longueur de flambement de la pièce soumise à N_u.

$e_0 = M_u / N_u$

h = plus petite dimension de la section.

Et ceci à condition d'adopter une excentricité totale de calcul $e_t = e_0 + e_a + e_2$ au lieu de e_0 dans l'évaluation de $M_f = N.e_A$, avec:

$e_0 = M_u / N_u$ = excentricité du premier ordre.

e_a = excentricité accidentelle, de aux imperfection géométriques, e_a = max (2 cm ; l /250).

e_2 = excentricité due aux effets du 2ème ordre (flambement) ou excentricité additionnelle

$$e_2 = \frac{3.l_f^{\ 2}}{10^4.h}(2+\alpha.\phi) \qquad (10.29)$$

Où:

α = rapport du moment du premier ordre, dû aux charges permanentes au moment total du premier ordre, $\alpha = M_G / M_t$

Φ = rapport de la déformation due au fluage à la déformation instantanée sous la charge considérée, Φ est généralement pris égal à **2**.

h = plus petite dimension de la section.

Pour le calcul des armatures à l'E.L.U, on utilise la théorie du Moment fictif; soit:

$$\begin{cases} A'_u = A'_{fu} \\ A_u = A'_{fu} + \dfrac{N}{\sigma_s} \end{cases}$$

N > 0 pour traction N < 0 pour compression.

La Contrainte des aciers tendus σ_s est celle utilisée en flexion simple fictive sous $M_f = N.e_A$ puisque les deux sections fictives et réelles sont soumises aux mêmes contraintes.

d- Conclusion

$$\begin{cases} A_{sfc} = \max(A_{ufc} ; A_{serfc}) \\ A'_{sfc} = \max(A'_{ufc} ; A'_{serfc}) \end{cases}$$

$$A_s \geq A_{\min} = 0.23b.d.\frac{f_{t28}}{f_e}$$

Remarque

- Si $A_s < 0$; la section est entièrement comprimée.
- Si $A'_s > A_s$, il est préférable de changer les dimensions de la section.

10.2.3. Section entièrement comprimée

La section est entièrement comprimée si:

N est un effort de compression.

y > d c'est-à-dire l'axe neutre est en dehors des deux nappes d'acier, ceci à lieu quand l'effort de compression N est appliqué à l'intérieur du noyau central (pour une section rectangulaire

$\mathbf{e_0 < |h/6|}$

* Pour une section rectangulaire, ceci à lieu quand:

$$M_{uA} = N_u.e_A > M_{BD} = 0.84 b_0.d^2.f_{bu}$$

Le calcul des sections d'acier par la méthode analytique est assez laboueux cependant, il existe des tableaux et des abaques [14] pour certaines formes de sections (rectangulaires – circulaires) aussi bien à l'ELU qu'à l'ELS. Ces abaques ne sont autres que les diagrammes d'interaction effort normal –moment fléchissant (N- M) traduisant l'équilibre des sections.