Travaux dirigés de physique quantique
PA101 - PC 4
Formalisme de Dirac

Exercice 1 Base orthonormée de dimension 3

Soit $|e_1\rangle$, $|e_2\rangle$ et $|e_3\rangle$ une base orthonormée d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension 3 dont le corps des scalaires est celui des nombres complexes. On considère deux scalaires α et β et deux vecteurs $|\Psi\rangle = \alpha\left(i\,|e_1\rangle + |e_2\rangle - |e_3\rangle\right)$ et $|\Phi\rangle = \beta\left(|e_2\rangle + |e_3\rangle\right)$.

1. Montrer que le produit scalaire $\langle\Psi|\Phi\rangle = 0$ quels que soient α et β.
2. Déterminer α et β tels que $\langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\Phi|\Phi\rangle = 1$.
3. Trouver un vecteur $|\chi\rangle$ de manière à ce que la famille $\{|\chi\rangle, |\Psi\rangle, |\Phi\rangle\}$ soit une base orthonormée de $\mathbb{E}$.

Exercice 2 Étude d'un opérateur

Soit $\mathcal{B} = \{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ une base orthonormée d'un espace de Hilbert $\mathbb{E}$ de dimension 2. Soit $\left|\widetilde{\Psi}\right\rangle$ et $\left|\widetilde{\Phi}\right\rangle$ les vecteurs de coordonnées respectives $(2, i)$ et $(1+i, 1-i)$ dans $\mathcal{B}$.

On considère par ailleurs $|\Psi\rangle = n\left|\widetilde{\Psi}\right\rangle$ et $|\Phi\rangle = \nu\left|\widetilde{\Phi}\right\rangle$ et l'opérateur linéaire $\widehat{A}$ de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est la suivante

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 3 \end{bmatrix}$$

1. Calculer n et ν de manière à ce que $|\Psi\rangle$ et $|\Phi\rangle$ soient de norme unité.
2. Vérifier que l'opérateur $\widehat{A}$ est hermitique. Illustrer la réponse en calculant $\langle\Psi|\,\widehat{A}\,|\Phi\rangle$ et $\langle\Phi|\,\widehat{A}\,|\Psi\rangle$.
3. Une grandeur physique A est représentée dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice $\widehat{A}$. Déterminer les valeurs propres λ et les kets propres $|\lambda\rangle$ de $\widehat{A}$. On choisira les vecteurs propres de telle manière que la base propre soit orthonormée et la première composante de chaque vecteur propre sera choisie réelle et positive dans la base $\mathcal{B}$.
4. Vérifier que $\widehat{\mathbb{I}}_2 = \sum_\lambda |\lambda\rangle\langle\lambda|$ (relation de fermeture) et que $\widehat{A} = \sum_\lambda \lambda|\lambda\rangle\langle\lambda|$ (décomposition spectrale).
5. A l'instant t le vecteur d'état du système est donné par $|\Psi(t)\rangle = |e_1\rangle$. Quels sont les résultats possibles d'une mesure de $\widehat{A}$, et quelles sont les probabilités correspondantes ? Même question si $|\Psi(t)\rangle = |e_1\rangle$.
6. Quelle est la moyenne $\langle A\rangle$ et l'écart type ΔA des résultats de mesure de la grandeur physique A dans chacun des états $|\Psi\rangle = |e_1\rangle$ et $|\Psi\rangle = |e_2\rangle$?

Exercice 3 Commutation d'opérateurs

On considère un système physique représenté par un vecteur dans un espace des états à 3 dimensions. Dans la base $|e_1\rangle$, $|e_1\rangle$ et $|e_3\rangle$ de cet espace on définit les deux opérateurs $\widehat{H}$ et $\widehat{B}$ sont représentés par les matrices :

$$\widehat{H} = \hbar\omega \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \widehat{B} = b \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

où ω et b sont des constantes réelles.

1. $\widehat{H}$ et $\widehat{B}$ sont-ils hermitiques ?
2. Montrer que $\widehat{H}$ et B commutent. Donner une base de vecteurs propres communs à $\widehat{H}$ et $\widehat{B}$.
3. Parmi les ensembles d'opérateurs : $\left(\widehat{H}\right)$, $\left(\widehat{B}\right)$, $\left(\widehat{H}, \widehat{B}\right)$ et $\left(\widehat{H}^2, \widehat{B}\right)$ lesquels forment un E.C.O.C. (Ensemble Complet des Observables qui Commutent).

Travaux dirigés de physique quantique
PA101 - PC 4
Formalisme de Dirac - Correction

Exercice 1

1. Dans la base $\mathcal{B} = \{|e_1\rangle\,;|e_2\rangle\,;|e_3\rangle\}$ on nous dit que $|\Psi\rangle = \alpha \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et que $|\Phi\rangle = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ainsi $\langle\Psi| = \alpha^* \begin{pmatrix} -i & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et donc $\langle\Psi|\Phi\rangle = \alpha^*\beta \begin{pmatrix} -i & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. Les deux kets $|\Psi\rangle$ et $|\Phi\rangle$ sont bien orthogonaux.

2. La norme de $|\Psi\rangle$ se calcule directement : $\langle\Psi|\Psi\rangle = \alpha^*\alpha \begin{pmatrix} -i & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3\alpha^*\alpha$. Si l'on veut que $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$, il suffit de choisir $\alpha = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{3}}$avec $\varphi \in \mathbb{R}$. De la même manière, $\langle\Phi|\Phi\rangle = 1$ conduit à $\beta = \frac{e^{i\varphi'}}{\sqrt{2}}$ avec $\varphi' \in \mathbb{R}$.

3. Plaçons-nous dans $\mathcal{B}$ et écrivons $|\chi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et n'oublions pas que ces 3 composantes sont complexes. Pour que $\mathcal{B}' = \{|\Psi\rangle\,;|\Phi\rangle\,;|\chi\rangle\}$ soit une base orthonormée, et compte-tenu de ce que nous savons déjà sur $|\Psi\rangle$ et $|\Phi\rangle$ il suffit que :
   (a) Les kets $|\Psi\rangle$ et $|\chi\rangle$ soient orthogonaux, i.e. $\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} (-ia + b - c) = 0$, la phase $e^{-i\varphi}$ étant non nulle on a donc $-ia + b - c = 0$;
   (b) Les kets $|\Phi\rangle$ et $|\chi\rangle$ soient orthogonaux, qui s'écrit donc $b + c = 0$;
   (c) Le ket $|\chi\rangle$ soit normé à l'unité ce qui s'écrit $aa^* + bb^* + cc^* = 1$.

   En regroupant ces trois équations on obtient tout d'abord $b = -c$ que l'on injecte dans la première pour avoir devient $a = 2ic$. Il ne reste plus qu'à écrire la conditions sur la norme pour obtenir $6cc^* = 1$ soit $c = \frac{e^{i\varphi''}}{\sqrt{6}}$ avec $\varphi'' \in \mathbb{R}$ et finalement $|\chi\rangle = \frac{e^{i\varphi''}}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On remarque que les trois vecteurs sont définis à une phase près.

Exercice 2 Étude d'un opérateur
On se place dans la base $\mathcal{B} = \{|e_1\rangle\,;|e_2\rangle\}$ orthonormée.

1. On calcule $\left\langle \widetilde{\Psi} \middle| \widetilde{\Psi} \right\rangle = \begin{pmatrix} 2 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} = 5$ et $\left\langle \widetilde{\Phi} \middle| \widetilde{\Phi} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} = 4$ ainsi on prendra $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$ et $|\Phi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$ toujours à une phase près.

2. Pour vérifier que $\widehat{A}$ est hermitique on peut procéder de plusieurs façons :
   (a) On peut vérifier que sa matrice représentative est invariante par l'opération qui consiste à la transposer et à prendre le complexe conjugué de ses éléments soit

$$\left(\widehat{A}^*\right)^\top = \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 3 \end{bmatrix} = \widehat{A}$$

(b) On peut aussi montrer que $\langle\Psi|\,\widehat{A}\ |\Phi\rangle = \langle\Phi|\,\widehat{A}\ |\Psi\rangle^*$, en effet

i. Premièrement

$$\begin{aligned}\langle\Phi|\,\widehat{A}\ |\Psi\rangle &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i & 1+i \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1-i & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}}(-1+i)\end{aligned}$$

ii. Deuxièmement

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\,\widehat{A}\ |\Phi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -i \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2i+2 \\ -5i+5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}}(-1-i)\end{aligned}$$

3. Le polynôme caractéristique de $\widehat{A}$ s'écrit $P_{\widehat{A}}(\lambda) = \det\left(\widehat{A} - \lambda\widehat{\mathbb{I}}_2\right) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$. Les racines sont évidentes $\lambda = -1$ et $\lambda = 4$.

   Le ket propre $|-1\rangle$ vérifie $\widehat{A}\,|-1\rangle = -\,|-1\rangle$ notons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ses composantes dans $\mathcal{B}$ on a donc le système

$$\begin{bmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies x = -2iy$$

   on veut de plus que $|-1\rangle$ soit de norme 1 ainsi $xx^* + yy^* = 1$ donc $5yy^* = 1$; si l'on veut que x soit réel et positif il convient de prendre $y = \frac{i}{\sqrt{5}}$, et finalement $|-1\rangle = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ i/\sqrt{5} \end{bmatrix}$.

   Le ket propre $|4\rangle$ peut être obtenu de la même façon, on trouve alors $|4\rangle = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2i/\sqrt{5} \end{bmatrix}$.

4. Il est important de préciser que les résultats qui suivent ne fonctionnent que pour une base orthonormée.

   (a) Relation de fermeture

   Il s'agit d'un simple calcul. Les composantes des kets propres ont été obtenues dans la base $\mathcal{B}$, dans cette base on écrit

$$\begin{aligned}\sum_\lambda |\lambda\rangle\langle\lambda| &= |4\rangle\langle 4| + |-1\rangle\langle -1| \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2i}{5} \\ \frac{-2i}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-2i}{5} \\ \frac{2i}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \widehat{\mathbb{I}}_2 \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

(b) Décomposition spectrale

Toujours dans la base B, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda} \lambda \ |\lambda\rangle \langle\lambda| &= 4 \ |4\rangle \langle 4| - |-1\rangle \langle -1| \\ &= 4 \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2i}{5} \\ \frac{-2i}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-2i}{5} \\ \frac{2i}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix} = \widehat{\mathbb{A}} \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

5. Les valeurs possibles d'une mesure de A sont les valeurs propres de $\widehat{A}$ soit 4 et -1. A un instant donné le système se trouve dans un état $|n\rangle$ que l'on peut décomposer par exemple sur la base propre. Dans cette décomposition nous avons vu dans le cours que le module au carré de ces composantes s'interprète comme la probabilité d'obtenir la valeur propre correspondant à l'état propre. Ainsi dans l'état $|e_n\rangle$ la probabilité d'obtenir 4 s'écrit $\mathcal{P}_{|e_n\rangle}(A=4) = |\langle 4|e_n\rangle|^2$ et celle d'obtenir -1 s'écrit $\mathcal{P}_{|e_n\rangle}(A=-1) = |\langle -1|e_n\rangle|^2$. Effectuons les calculs dans les 2 cas où le système se trouve dans l'un ou l'autre des deux états servant de base à $\mathbb{E}$.

   (a) Etat $|e_1\rangle$

$$\mathcal{P}_{|e_1\rangle}(A=4) = |\langle 4|e_1\rangle|^2 = \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{5}$$

$$\mathcal{P}_{|e_1\rangle}(A=-1) = |\langle -1|e_1\rangle|^2 = \left| \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{4}{5}$$

   (b) Etat $|e_2\rangle$

$$\mathcal{P}_{|e_2\rangle}(A=4) = |\langle 4|e_2\rangle|^2 = \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{4}{5}$$

$$\mathcal{P}_{|e_2\rangle}(A=-1) = |\langle -1|e_2\rangle|^2 = \left| \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-i}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{5}$$

6. La valeur moyenne et l'écart type dans un état $|e_n\rangle$ peuvent se calculer d'au moins deux manières différentes :

   (a) En appliquant la définition quantique de la valeur moyenne on a directement $\langle A\rangle_{|e_n\rangle} = \langle e_n|A|e_n\rangle$ puis en écrivant que l'écart-type est la racine carrée de la variance, elle même étant la moyenne du carré moins le carré de la moyenne, soit $\Delta A_{|e_n\rangle} = \sqrt{\langle e_n|A^2|e_n\rangle - \langle e_n|A|e_n\rangle^2}$

   (b) Une définition plus statistique de la valeur moyenne est d'écrire que celle-ci est obtenue en faisant la somme des réalisations pondérées par la probabilité correspondante, soit $\langle A\rangle_{|e_n\rangle} = \sum_\lambda \lambda \mathcal{P}_{|e_n\rangle}(A=\lambda)$. Pour calculer l'écart-type on évalue la moyenne du carré par une relation du même type soit $\langle A^2\rangle_{|e_n\rangle} = \sum_\lambda \lambda^2 \mathcal{P}_{|e_n\rangle}(A=\lambda)$ puis on utilise la même relation que dans le cas précédent $\Delta A_{|e_n\rangle} = \sqrt{\langle A^2\rangle_{|e_n\rangle} - \langle A\rangle_{|e_n\rangle}^2}$.

avec la première méthode on trouve pour l'état $|e_1\rangle$

$$\langle A\rangle_{|e_1\rangle} = \langle e_1|A|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2i \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \langle e_1|A^2|e_1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6i \\ 12i & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 12i \end{pmatrix} = 4 \end{aligned}$$

et donc $\Delta A_{|e_1\rangle} = \sqrt{\langle e_1|\, A^2 \,|e_1\rangle - \langle e_1|\, A \,|e_1\rangle^2} = \sqrt{4-0} = 2$. On trouve les mêmes résultats en appliquant la deuxième méthode on trouve

$$\begin{aligned} \langle A\rangle_{|e_1\rangle} &= (-1) \times \mathcal{P}_{|e_1\rangle}(A=-1) + 4 \times \mathcal{P}_{|e_1\rangle}(A=4) \\ &= (-1) \times \frac{4}{5} + 4 \times \frac{1}{5} = 0 \\ \langle A^2\rangle_{|e_1\rangle} &= (-1)^2 \times \mathcal{P}_{|e_1\rangle}(A=-1) + 4^2 \times \mathcal{P}_{|e_1\rangle}(A=4) \\ &= \frac{4}{5} + \frac{16}{5} = 4 \end{aligned}$$

et donc la même valeur pour $\Delta A_{|e_1\rangle}$.
Dans l'état $|e_2\rangle$ votre méthode préférée permet d'obtenir à présent $\langle e_2|\, A \,|e_2\rangle = 3$, $\langle e_2|\, A^2 \,|e_2\rangle = 13$ et $\Delta A_{|e_2\rangle} = \sqrt{13 - 3^2} = 2$. Le fait que l'on trouve un écart-type égal à celui obtenu dans l'état $|e_1\rangle$ est bien entendu une pure coïncidence.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ Commutation d'opérateurs

1. Les matrices étant réelles, elles sont donc évidement hermitiennes.
2. Un simple calcul permet de vérifier que

$$\widehat{H}\ \widehat{B} = \hbar b\omega \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \hbar b\omega \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \widehat{B}\widehat{H}$$

puisque $\left[\widehat{H}\ ,\widehat{B}\right] = 0$ on peut diagonaliser $\widehat{H}$ et $\widehat{B}$ dans une même base. Les éléments propres de $\widehat{B}$ sont les suivants : la valeur propre double $\lambda = b$ est associée aux deux vecteurs propres $|b,1\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|b,2\rangle = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la valeur propre $\lambda = -b$ est associée au vecteur propre $|-1\rangle = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les kets de la base propres orthonormée qui diagonalise $\widehat{B}$ sont donc $|b,1\rangle = |e_1\rangle$, $|b,2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_2\rangle + |e_3\rangle)$ et $|-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_2\rangle - |e_3\rangle)$. Notons φ l'application linéaire dont la matrice est $\widehat{H}$ dans $\mathcal{B}$. On peut donc écrire que $\varphi(|e_1\rangle) = \hbar\omega\,|e_1\rangle$,$\varphi(|e_2\rangle) = -\hbar\omega\,|e_2\rangle$ et $\varphi(|e_3\rangle) = -\hbar\omega\,|e_3\rangle$ et en déduire que

$$
\begin{aligned}
\varphi(|b,1\rangle) &= \varphi(|e_1\rangle) = \hbar\omega\,|e_1\rangle = \hbar\omega\,|b,1\rangle \\
\varphi(|b,2\rangle) &= \varphi\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(|e_2\rangle + |e_3\rangle)\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\varphi(|e_2\rangle) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\varphi(|e_3\rangle) \\
&= -\tfrac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\,|e_2\rangle - \tfrac{\hbar\omega}{\sqrt{2}}\,|e_3\rangle = -\hbar\omega\tfrac{1}{\sqrt{2}}(|e_2\rangle + |e_3\rangle) \\
&= -\hbar\omega\,|b,2\rangle \\
\varphi(|-1\rangle) &= \varphi\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(|e_2\rangle - |e_3\rangle)\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\varphi(|e_2\rangle) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\varphi(|e_3\rangle) \\
&= -\hbar\omega\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,|e_2\rangle + \hbar\omega\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,|e_3\rangle = -\hbar\omega\tfrac{1}{\sqrt{2}}(|e_2\rangle - |e_3\rangle) \\
&= -\hbar\omega\,|-1\rangle
\end{aligned}
$$

et donc que la matrice représentative de φ dans la base propre s'écrit

$$
\widehat{H}\,' = \hbar\omega \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \widehat{H}
$$

Dans la base propre orthonormée $\mathcal{D} = \{|b,1\rangle, |b,2\rangle, |-1\rangle\}$ les opérateurs $\widehat{H}$ et $\widehat{B}$ sont donc diagonaux. Il s'agit donc d'une base de vecteurs propres communs à $\widehat{H}$ et $\widehat{B}$.

3. Un ensemble complet $K = \left\{\widehat{A}_1, \cdots, \widehat{A}_n, \cdots\right\}$ d'observable qui commutent vérifie deux conditions :
   (a) tous ses éléments commutent deux à deux (commutation) ;
   (b) il existe une *unique* base orthonormée de kets propres communs à toutes les observables (complétude).

   Pour résumer la situation :
   - Si une observable ne possède aucune valeur propre dégénérée, à un facteur multiplicatif près, chaque valeur propre permet de déterminer un vecteur propre unique. Le singleton constitué par cette observable est donc un ECOC car une matrice commute avec elle-même !
   - Si une observable possède au moins une valeur propre dégénérée, le sous-espace propre correspondant est de dimension plus grande que 1, on peut choisir une autre base que la base propre pour caractériser cet espace sans pour autant que la matrice perde son caractère diagonal dans cette nouvelle base. Le singleton constitué par cette observable n'est donc plus un ECOC.
   - Considérons à présent un couple d'observables qui commutent, ces dernières possèdent donc les mêmes valeurs propres. Si les valeurs propres sont non dégénérées, elles forment un ECOC. S'il existe des valeurs propres dégénérées, il est nécessaire de pouvoir identifier de façon unique autant de vecteurs propres que la dimension de chaque sous espace propre pour que le couple d'observable forme un ECOC.

   L'utilité de former des ECOC en mécanique quantique apparaîtra par la suite, mais on voit déjà que la base unique définie par la propriété de complétude permet de fabriquer un cadre privilégié pour étudier le problème considéré.

   Passons en revue les divers cas proposés.
   - Le singleton $\{\widehat{H}\}$ n'est pas un ECOC : en effet, nous avons vu que les bases $\mathcal{D}$ et $\mathcal{B}$ sont deux bases orthonormées distinctes qui toutes les deux sont bases propres de $\widehat{H}$. Plus simplement $\widehat{H}$ possède la valeur propre double $\lambda = -\hbar\omega$ qui l'empêche donc de former un ECOC ;
   - Le singleton $\{\widehat{B}\}$ n'est pas un ECOC à cause de sa valeur propre double $\lambda = b$: Par exemple, le résultat d'une mesure de B qui fournirait b ne permet pas de savoir si l'on se trouve dans l'état $|b,1\rangle$ ou dans l'état $|b,2\rangle$.

- Le couple $\{\widehat{H}, \widehat{B}\}$ est un ECOC : Les deux observables commutent et choix de la base $\mathcal{D}$ permet de lever l'ambiguïté mentionnée dans le point précédent. Si le résultat d'une mesure de B donne la valeur b deux états sont possibles $|b,1\rangle$ ou $|b,2\rangle$ mais comme $\widehat{H}$ et $\widehat{B}$ commutent il suffit de mesurer simultanément la valeur de H : si l'on trouve $\hbar\omega$ c'est que l'on est dans l'état $|b,1\rangle = |e_1\rangle$ et si l'on trouve $-\hbar\omega$ c'est que l'on est dans l'état $|b,2\rangle$. Ainsi, le résultat d'une mesure, éventuellement conjointe, permet d'identifier un état unique dans lequel se trouve le système.
- Le couple $\{\widehat{H}^{\ 2}, \widehat{B}\}$ n'est pas un ECOC. Il est pourtant clair que $\widehat{H}^{\ 2}$ et $\widehat{B}$ commutent. On voit en effet immédiatement que $\widehat{H}^{\ 2} = \hbar^2\omega^2\mathbb{I}$ qui commute avec n'importe qu'elle autre matrice carrée d'ordre 3. La valeur propre $\hbar^2\omega^2$ est donc trois fois dégénérée : toutes les bases orthonormées de C^3 sont des bases propres de $\widehat{H}^{\ 2}$. Etant donné que $\widehat{B}$ possède lui aussi une valeur propre de dégénérée on ne peut pas rattraper l'affaire. Pour fabriquer un ECOC, on vérifie facilement qu'il suffit de rajouter une autre observable qui commute à la fois avec $\widehat{H}^{\ 2}$et $\widehat{B}$ ...